

ANNALES DES CONCOURS

MP
Physique et Chimie
2014

Sous la coordination de

Sébastien DESREUX
Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Vincent FREULON
Professeur en CPGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Alexandre HÉRAULT
Professeur en CPGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Par

Stanislas ANTCZAK
Professeur agrégé

Nicolas BRUOT
ENS Cachan

Olivier FRANTZ
Professeur agrégé en école d'ingénieur

Vincent FREULON
Professeur en CPGE

Alexandre HÉRAULT
Professeur en CPGE

Kim LARMIER
ENS Ulm

Rémi LEHE
ENS Ulm

Stéphane RAVIER
Professeur en CPGE

Jimmy ROUSSEL
Professeur en CPGE

Tiphaine WEBER
Enseignant-chercheur à l'université

Principales disparitions du programme de physique-chimie en MP

PHYSIQUE

- loi de Biot et Savart
- potentiel vecteur
- angle solide
- étude des conducteurs en équilibre électrostatique
- modèle de Drude
- relations de passage des champs électrique et magnétique
- théorème de Coulomb

Électromagnétisme

- amplificateur opérationnel
- facteur de puissance

Électronique

- miroirs sphériques
- formules de conjugaison pour les lentilles minces

Optique

- potentiels thermodynamiques
- travail maximum récupérable

Thermodynamique

CHIMIE

- diagrammes d'Ellingham

Thermodynamique

Sommaire

		Énoncé	Corrigé
CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES			
Physique 1	Satellites, système articulé de quatre solides, onde thermique, pompe à chaleur géothermique. <i>forces centrales, mécanique du solide, diffusion thermique, thermodynamique</i>	10	23
Physique 2	Miroirs de télescopes et réseau 4G. <i>optique ondulatoire, optique géométrique, ondes électromagnétiques</i>	46	60
Chimie	Séquestration minérale du dioxyde de carbone dans les olivines. <i>cristallographie, diagrammes binaires, thermochimie, solutions aqueuses</i>	83	90
MINES-PONTS			
Physique 1	De la physique autour d'un tore. <i>mécanique du solide, électromagnétisme, induction, diffusion thermique</i>	102	108
Physique 2	Lasers et distances. <i>mécanique du point, optique géométrique, transferts thermiques</i>	121	128
Chimie	Autour du vanadium. <i>cristallographie, diagrammes E-pH, oxydoréduction, cinétique chimique, thermochimie</i>	145	151

CENTRALE-SUPÉLEC

Physique	Les télescopes infrarouges. <i>thermodynamique, optique géométrique, diffraction, interférences, mécanique du point, conduction thermique</i>	161	168
Physique et Chimie	Les LIDAR atmosphériques. <i>électromagnétisme, thermodynamique, cristallographie, solutions aqueuses, statique des fluides, thermochimie</i>	182	191

POLYTECHNIQUE

Physique	Centrale inertielle. <i>mécanique du point, optique ondulatoire, électrostatique, oscillateur amorti, référentiel non galiléen</i>	220	231
Physique et Sciences de l'Ingénieur	À propos de l'émission de lumière. <i>électrocinétique, physique des lasers, diffusion</i>	248	260

FORMULAIRES

Constantes physiques	283
Constantes chimiques	280
Formulaire d'analyse vectorielle	284
Classification périodique	288

CCP Physique 1 MP 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nicolas Bruot (ENS Cachan) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Jérôme Lambert (Enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants couvrant différents aspects du programme.

- L'exercice I étudie la mise en orbite d'un satellite autour de Mars. Il fait appel à la mécanique du point matériel dans un champ gravitationnel.
- L'exercice II propose l'étude du mouvement d'un chariot le long d'un câble incliné. Il donne l'occasion de manipuler les théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique pour des solides dans différents référentiels.
- L'exercice III aborde les variations de la température du sol dues aux variations quotidiennes et saisonnières de la température de l'atmosphère. L'équation de la diffusion y est résolue en plusieurs étapes.
- L'exercice IV a pour objet l'étude du cycle thermodynamique d'une pompe à chaleur. Il débute avec de nombreuses questions de cours sur le gaz parfait et le diagramme de Clapeyron, pour lesquelles aucune démonstration n'est demandée mais dont la méconnaissance empêcherait de terminer le problème.

Ce sujet long et varié comporte un nombre très important de questions de cours, ce qui le rend très adapté pour tester si vous avez compris et assimilé ce dernier. Dans les problèmes III et IV, les interprétations des résultats obtenus sont d'un niveau assez avancé. Les exercices I, III et IV sont entièrement compatibles avec le programme de prépa en vigueur depuis la rentrée 2014.

INDICATIONS

Exercice I

- I.3 On pourra projeter le principe fondamental de la dynamique sur \vec{e}_r et utiliser la deuxième formule de Binet.
- I.4 Prendre $\varepsilon = +1$. En quoi ce choix influence-t-il la solution traitée ?
- I.6 Calculer l'énergie mécanique en $\theta = \theta_0$.
- I.9 Exprimer l'énergie mécanique à $t = 0$ puis se servir du résultat de la question I.6.
- I.10 La durée du trajet entre P et A est égale à la moitié de la période de révolution T.
- I.12 Appliquer le principe fondamental de la dynamique au module P_1 .

Exercice II

- II.1 Pour simplifier le calcul, considérer le système $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ dans le calcul du centre de masse de $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$.
- II.2 Utiliser la relation

$$\vec{v}(I_1 \in \text{roue}) = \vec{v}(C_1) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{C_1 I_1}$$

et la condition de roulement sans glissement.

- II.5 Appliquer le théorème du moment cinétique sur le système $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.
- II.7 La condition se résume à $N_1 > 0$.
- II.10 Exprimer le rapport N/T sous la forme de la tangente d'un angle.
- II.12 S'inspirer des questions II.4 à II.6.

Exercice III

- III.4 On rappelle que $[(1+j)/\sqrt{2}]^2 = j$.
- III.9 Remarquer que le champ de température a une composante correspondant à une onde propagative.

Exercice IV

- IV.3.b e est majoré pour un cycle réversible.
- IV.6.a La loi de Laplace relie certaines grandeurs thermodynamiques pour une transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait.
- IV.6.b Considérer séparément la partie de la transformation correspondant à un refroidissement du gaz et la partie correspondant à un changement d'état.
- IV.7.b Remplacer (en le justifiant) l'étape conduisant au transfert thermique q_c par la succession de deux transformations plus simples.
- IV.9 Relier w à q_c et q_f .

I. SATELLITES

I.1 Notons \vec{L}_O le moment cinétique du point P, par rapport à O, dans le référentiel galiléen. D'après le théorème du moment cinétique,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OP} \wedge \vec{F} \quad \text{avec} \quad \vec{F} = -\frac{mMG}{r^3} \vec{OP}$$

Comme \vec{OP} et \vec{F} sont dans la même direction, le produit vectoriel est nul et

$$\vec{L}_O = C^{\text{te}}$$

D'après la définition du moment cinétique,

$$\vec{L}_O = m \vec{OP} \wedge \vec{v}_P$$

où \vec{v}_P est la vitesse du point P. Cette vitesse est donc perpendiculaire à tout instant au vecteur constant \vec{L}_O . Il en résulte que le point P reste dans le plan perpendiculaire à \vec{L}_O et passant par O, et donc que **le mouvement est plan**.

I.2 Réécrivons \vec{L}_O en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= mr \vec{e}_r \wedge \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r) \\ &= mr \vec{e}_r \wedge \left(\frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \right) \\ \vec{L}_O &= mr^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z \end{aligned}$$

D'après la question précédente, \vec{L}_O est un vecteur constant, donc

$$C = r^2 \frac{d\theta}{dt} \text{ est une constante du mouvement.}$$

I.3 Le principe fondamental de la dynamique appliqué au point P dans le référentiel galiléen centré en O s'écrit

$$m \vec{a}_P = -\frac{mMG}{r^2} \vec{e}_r$$

Projetons cette égalité sur \vec{e}_r et utilisons la deuxième formule de Binet pour l'accélération :

$$-mC^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{mMG}{r^2}$$

soit, puisque $u = 1/r$,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{MG}{C^2}$$

C'est une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants dont les solutions sont de la forme $u(\theta) = u_0 + u_1$, avec $u_0 = MG/C^2$ une solution particulière et u_1 la solution générale de l'équation homogène associée, qui s'écrit

$$u_1(\theta) = A \cos(\theta - \Theta)$$

où A et Θ sont deux constantes. Comme $u = 1/r$,

$$\frac{1}{r(\theta)} = u_0(\theta) + u_1(\theta) = \frac{MG}{C^2} \left[1 + \frac{AC^2}{MG} \cos(\theta - \Theta) \right]$$

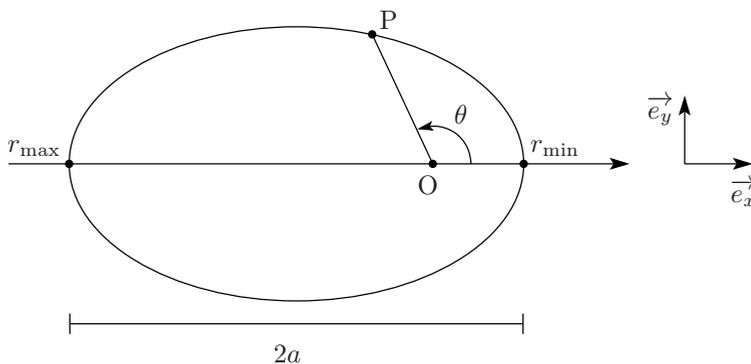
d'où
$$r(\theta) = \frac{C^2/(MG)}{1 + [AC^2/(MG)] \cos(\theta - \Theta)}$$

puis
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon e \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{C^2}{MG}$$

et avec $\theta_0 = \Theta$ et $\varepsilon e = AC^2/(MG)$ deux constantes dépendant des conditions initiales.

D'autres méthodes permettent d'obtenir la trajectoire du corps. Ainsi, les méthodes du vecteur excentricité et du vecteur de Runge-Lenz apparaissant parfois aux concours, il est utile de les connaître.

I.4 La trajectoire est une ellipse dont l'un des foyers est le point O. Prenons par exemple le cas $\varepsilon = +1$ (dans l'autre cas, il suffit d'invertir r_{\min} et r_{\max}). Le schéma ci-dessous représente la trajectoire dans le cas $\theta_0 = 0$.



Le demi-grand axe vérifie
$$\begin{aligned} 2a &= r_{\min} + r_{\max} \\ &= r(\theta_0) + r(\theta_0 + \pi) \\ &= \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \end{aligned}$$

donc
$$2a = \frac{p(1-e) + p(1+e)}{1-e^2}$$

d'où

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

Bien que les ellipses ne soient plus au programme, les méthodes de calcul de la question I.3 et des énergies potentielle, cinétique et mécanique développées dans les deux questions suivantes le sont. Il faut savoir établir l'équation du mouvement d'une planète, et savoir effectuer les calculs des énergies pour une trajectoire d'équation donnée, qui sera normalement désormais donnée dans l'énoncé.

I.5 La force de gravitation \vec{F} est conservative et dérive d'une énergie potentielle E_p telle que $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p$. On a donc, en projetant cette relation sur \vec{e}_r ,

CCP Physique 2 MP 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémi Lehe (ENS Ulm) ; il a été relu par Sébastien Le Roux (agrégé de physique, doctorant en physique) et Vincent Freulon (professeur en CPGE).

Ce sujet comporte deux thèmes : les miroirs de télescope (optique, 2 parties) et la réception 4G (électromagnétisme, 3 parties).

- Dans la première partie, on cherche à mesurer le rayon de courbure d'un miroir sphérique de télescope en plaçant ce miroir dans un interféromètre de Michelson. Après avoir retrouvé plusieurs résultats concernant les interférences à deux sources et l'interféromètre de Michelson, on est amené à relier la configuration avec le miroir sphérique à une configuration de type lame d'air. On analyse sa figure d'interférence en conséquence, pour finalement en déduire son rayon.
- La deuxième partie porte sur la formation des images dans les satellites SPOT et Pléiades. On utilise principalement des propriétés d'optique géométrique afin d'établir diverses propriétés des systèmes d'imagerie de ces satellites.
- Dans la troisième partie, on s'intéresse aux ondes électromagnétiques émises dans le cadre de transmissions de données à travers le réseau 4G. On retrouve ainsi différents résultats connus concernant la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.
- La quatrième partie se concentre sur les conséquences des réflexions des ondes du réseau 4G sur divers obstacles. On considère ainsi la structure de ces ondes au voisinage d'un conducteur, puis d'un mur en béton. On en déduit que les réflexions peuvent être gênantes pour la réception du signal.
- Afin de réduire l'impact de ces réflexions, la cinquième partie introduit la technique MIMO qui consiste à combiner les valeurs d'une onde mesurée en deux points distincts pour en déduire sa provenance.

Les parties 1, 3 et 4 sont très proches du cours : interférences à deux ondes (partie 1) et propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide (parties 3 et 4). Elles serviront utilement de révision sur ces chapitres. Les parties 2 et 5 sont pour l'essentiel accessibles et reposent principalement sur une bonne lecture du sujet.

Quelques questions des parties 1 et 2 nécessitent des connaissances sur les miroirs sphériques, qui ne figurent plus dans les nouveaux programmes de MPSI. Toutefois, ces questions sont localisées et on peut facilement poursuivre le sujet en utilisant les réponses données dans ce corrigé.

INDICATIONS

Partie I

- I.1.4.a Calculer $S_1M_1 = \sqrt{S_1M_1^2}$ en utilisant la formule de l'énoncé, ainsi qu'un développement limité bien choisi.
- I.1.4.f Remarquer que l'ordre d'interférence correspondant au premier maximum en dehors du centre est $p_0 - 1$, et conclure grâce à l'expression de ΔL (question I.1.4.b).
- I.2.1.b Raisonner sur les distances entre les différents points considérés, et utiliser le fait que les réflexions conservent ces distances.
- I.2.2.b Réutiliser l'expression obtenue en I.1.4.f et l'inverser afin d'obtenir a , puis e .
- I.2.3.a Remarquer que les axes O_1S_2 et O_1S_1 forment respectivement un angle 2α et -2α avec l'axe OO_1 .
- I.3.1 Cette question nécessite des connaissances sur les miroirs sphériques, qui ne figurent plus dans les nouveaux programmes de MPSI.

Partie II

- II.1.3.a Utiliser le fait que le grandissement transverse d'une lentille a pour expression $G_t = \overline{OA'}/\overline{OA}$.
- II.2.3 Négliger l'impact du système afocal précédant le miroir M_2 , et utiliser le fait que le grandissement d'un miroir sphérique vaut $G_t = -\overline{SM'}/\overline{SM}$.
- II.2. Les questions II.2.1 à II.2.4 nécessitent des connaissances sur les miroirs sphériques, qui ne figurent plus dans les nouveaux programmes de MPSI.
- II.2.5.c Utiliser un rayon parallèle au rayon incident entre les lentilles L_1 et L_2 et passant par O_{L_2} .

Partie III

- III.1.4 Utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

Partie IV

- IV.2.4 Chercher ici les points où l'amplitude d'oscillation du champ est nulle, ainsi que les points où cette amplitude est maximale.
- IV.7 Penser aux conséquences des interférences destructives pour la réception du signal.

Partie V

- V.1.1 Utiliser le fait que les triplets de vecteurs $\vec{k}_1, \vec{E}_1, \vec{B}_1$ et $\vec{k}_2, \vec{E}_2, \vec{B}_2$ forment des trièdres orthogonaux directs.
- V.2.3 Chercher une valeur de ϕ pour laquelle l'exponentielle complexe dans \underline{f}_1 vaut -1 . Faire ensuite de même avec \underline{f}_2 .
- V.2.4 Faire le lien avec les problèmes posés par les réflexions à la fin de la partie IV.

OPTIQUE : LES MIROIRS DE TÉLESCOPE

I. MESURE DU RAYON DE COURBURE D'UN MIROIR PAR UNE MÉTHODE INTERFÉRENTIELLE

I.1.1 Les ondes lumineuses issues des sources S_1 et S_2 ont la même longueur d'onde et sont cohérentes entre elles. Elles peuvent donc interférer, et, par propriété du cours, l'intensité en M est

$$I(M) = 2 I_0 [1 + \cos(\Delta\phi(M))]$$

I.1.2 De manière générale, le déphasage $\Delta\phi(M)$ s'exprime comme

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\mathcal{L}(M)$$

où $\Delta\mathcal{L}(M)$ est la différence de *chemin optique*. Ici, l'indice optique est considéré homogène et égal à 1. Dans ces conditions, la différence de chemin optique $\Delta\mathcal{L}(M)$ est égale à la différence de marche géométrique $\Delta L(M)$, et on a donc

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L(M)$$

I.1.3.a Puisque a et d valent 1 mm et 1 m respectivement, on a $a \ll d$. Par ailleurs, les dimensions de la figure d'interférence sont de l'ordre du centimètre, donc $|z| \ll d$ et $|y| \ll a$. Dans ce cas, on peut effectuer un développement limité dans les expressions des distances S_1M et S_2M , afin d'arriver à une expression simplifiée de $\Delta L(M)$

$$\begin{aligned} \Delta L(M) &= S_{2M} - S_{1M} \\ &= \sqrt{d^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} - \sqrt{d^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} \\ &= d \left(\sqrt{1 + \frac{1}{d^2} \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{d^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{d^2} \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{d^2}} \right) \\ &= d \left(1 + \frac{1}{2d^2} \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2d^2} - 1 - \frac{1}{2d^2} \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{2d^2} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta L(M) = \frac{az}{d}$$

où l'on a effectué un développement limité à l'ordre 1 de la fonction racine carrée. Remarquons au passage que l'expression finale de la différence de marche est indépendante de y .

I.1.3.b À partir des résultats des questions I.1.1, I.1.2 et I.1.3.a, on obtient

$$I(M) = 2 I_0 \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{az}{\lambda d}\right) \right)$$

I.1.3.c L'ordre d'interférence au point O est défini par $p_0 = \Delta L(O)/\lambda$. Or, le point O se situe en $z = 0$, et donc $\Delta L(O) = 0$ d'après la question I.1.3.a. Par conséquent,

$$p_0 = 0$$

Ce résultat n'est pas surprenant, car le point O est à égale distance de S_1 et S_2 , ce qui entraîne directement $\Delta L(O) = 0$ et $p_0 = 0$ (sans avoir besoin d'utiliser la question I.1.3.a). Par ailleurs, le résultat $p_0 = 0$ indique que les ondes issues de S_1 et S_2 interfèrent constructivement en O. L'intensité en ce point vaut donc $4 I_0$ (d'après la question I.1.3.b), et le point O correspond donc à la position d'une **frange brillante**.

I.1.3.d D'après l'expression obtenue à la question I.1.3.b, la figure d'interférence est constituée de franges **rectilignes** régulièrement espacées et **parallèles à l'axe Oy**. Les franges brillantes sont obtenues pour les valeurs de z qui vérifient

$$\cos\left(2\pi \frac{az}{\lambda d}\right) = 1$$

c'est-à-dire pour
$$z = n \frac{\lambda d}{a} \quad \text{où } n \text{ est un entier relatif}$$

d'où l'expression de l'interfrange :
$$d_i = \frac{\lambda d}{a}$$

I.1.3.e D'après les résultats de la question précédente, la position du premier maximum (c'est-à-dire de la première frange brillante) est

$$z = \frac{\lambda d}{a} = 0,5 \text{ mm}$$

I.1.4.a La différence de marche s'exprime comme

$$\begin{aligned} \Delta L(M) &= S_2M - S_1M \\ &= \sqrt{S_2M^2} - \sqrt{S_1M^2} \\ \Delta L(M) &= \sqrt{SM^2 + SS_2^2 - 2\vec{SM} \cdot \vec{SS}_2} - \sqrt{SM^2 + SS_1^2 - 2\vec{SM} \cdot \vec{SS}_1} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'égalité suggérée. D'après la disposition des points S, M, S_1 et S_2 sur la figure 2, les produits scalaires peuvent s'exprimer comme

$$\vec{SM} \cdot \vec{SS}_1 = SM SS_1 \cos i \quad \text{et} \quad \vec{SM} \cdot \vec{SS}_2 = -SM SS_2 \cos i$$

En remplaçant ces relations dans l'expression de ΔL , on obtient

$$\begin{aligned} \Delta L(M) &= \sqrt{SM^2 + SS_2^2 + 2 SM SS_2 \cos i} - \sqrt{SM^2 + SS_1^2 - 2 SM SS_1 \cos i} \\ &= SM \left(\sqrt{1 + \frac{SS_2^2}{SM^2} + 2 \frac{SS_2}{SM} \cos i} - \sqrt{1 + \frac{SS_1^2}{SM^2} - 2 \frac{SS_1}{SM} \cos i} \right) \end{aligned}$$

Or, SS_1 et SS_2 valent $a/2 = 0,5$ mm, tandis que SM est de l'ordre de $d = 1$ m. On a donc $SS_1/SM \ll 1$ et $SS_2/SM \ll 1$. Effectuons un développement limité de $\Delta L(M)$ à l'ordre 1 en ces deux variables :

$$\Delta L(M) = SM \left(1 + \frac{SS_2}{SM} \cos i - 1 + \frac{SS_1}{SM} \cos i \right) = (SS_1 + SS_2) \cos i$$

Ainsi,

$$\Delta L(M) = a \cos i$$

CCP Chimie MP 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tiphaine Weber (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Christelle Serba (ENS Lyon) et Alexandre Hérault (Professeur en CPGE).

Cette épreuve a pour thème la séquestration du dioxyde de carbone gazeux par les olivines, une famille de minerais. Ses quatre sous-parties sont indépendantes.

- La première partie étudie les olivines, en commençant par l'exploitation du diagramme binaire solide-liquide de deux d'entre elles. Ceci n'est plus au programme de la filière MP depuis la rentrée 2014. La deuxième sous-partie est consacrée à leur structure cristallographique.
- La deuxième partie aborde le processus de carbonatation des olivines, d'abord d'un point de vue thermodynamique, puis via les équilibres en solution.

Hormis la première sous-partie, ce sujet est tout à fait dans l'esprit du nouveau programme. Il s'appuie à la fois sur les connaissances de première et de deuxième année et, en s'aidant éventuellement des indications, il peut constituer un bon entraînement aux épreuves pour les futurs candidats, notamment ceux de la filière PSI pour lesquels tous les points abordés restent au programme.

INDICATIONS

Partie I

- I.8 Les cristaux de type NaCl cristallisent dans une structure où les anions occupent les nœuds d'une maille cubique faces centrées et les cations occupent la totalité des sites octaédriques.
- I.9 Le contact, dans un solide ionique, se fait entre ions de charges opposées.
- I.13 Dans une perovskite parfaite, les anions sont en contact, à la fois avec les cations de type A et ceux de type B.
- I.15 Si t est inférieur à 1, alors r_A est plus faible que dans une perovskite parfaite. Si t est supérieur à 1, au contraire, c'est le cation B qui est trop petit pour assurer le contact.

Partie II

- II.3 Par définition, l'affinité chimique d'une réaction vaut $\mathcal{A} = -\Delta_r G$. Le raisonnement sur les critères d'évolution du système à l'aide de \mathcal{A} est similaire à celui impliquant $\Delta_r G$.
- II.8 C'est le dioxyde de carbone gazeux qui, en acidifiant l'eau, est à l'origine de l'altération chimique des roches.
- II.10 Quelle espèce du dioxyde de carbone est prédominante dans l'eau pure ?
- II.11 Dans l'eau, aux pH usuels, les ions carbonate se protonent suivant la réaction
- $$\text{H}_2\text{O}_{(\ell)} + \text{CO}_3^{2-}_{(\text{aq})} = \text{HCO}_3^{-}_{(\text{aq})} + \text{OH}^{-}_{(\text{aq})}$$
- II.12 Écrire la réaction qui se produit entre le dioxyde de carbone gazeux et le carbonate de magnésium solide.

I. LES OLIVINES

Diagramme solide-liquide forstérite-fayalite

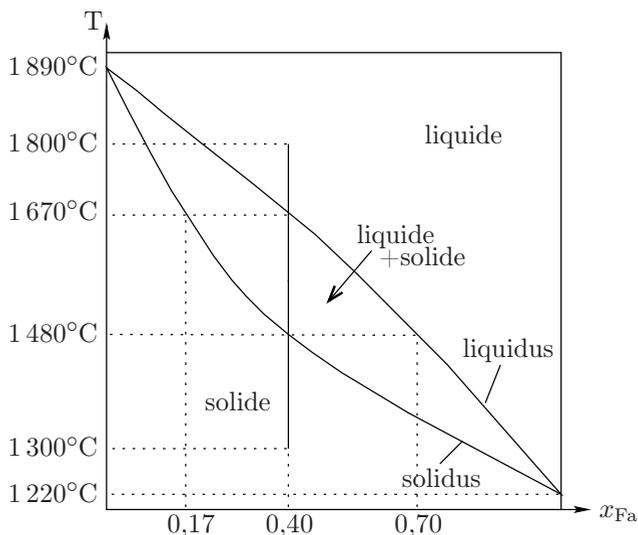
Cette sous-partie n'est plus au programme de la filière MP à partir de la rentrée 2014. Elle reste toutefois au programme des autres filières, notamment la filière PSI pour laquelle l'étude des diagrammes binaires d'alliages métalliques est tout à fait équivalente à ce qui est traité ici.

I.1 Le diagramme binaire fourni par l'énoncé comporte un unique fuseau. C'est celui de deux espèces totalement miscibles, que ce soit dans la phase liquide ou sous forme de solution solide.

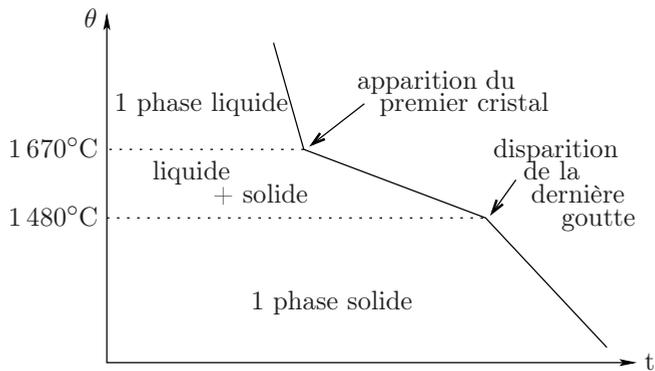
I.2 Le **domaine I**, aux températures les plus basses, est composé d'une **phase solide**. Lorsque la température augmente, une partie du solide fond. Dans le **domaine II**, **coexistent deux phases**, une phase liquide, dont la composition est donnée par le liquidus, et une phase solide, dont la composition est donnée par le solidus. Au-delà d'une certaine température, il ne subsiste plus de solide et le **domaine III** représente la **phase liquide**.

I.3 On lit sur le diagramme une température de fusion de 1890°C pour la forstérite pure ($x_{\text{Fa}} = 0$) et de 1220°C pour la fayalite ($x_{\text{Fa}} = 1$). C'est donc cette dernière qui a la température de fusion la plus faible.

I.4 À 1800°C , le mélange est entièrement liquide, et le reste lorsqu'on le refroidit jusqu'à 1670°C . À cette température, on rencontre le liquidus et il se forme un premier cristal d'olivine ($x_{\text{Fa}}^{\text{s}} = 0,17$). Le refroidissement se poursuivant, la quantité de liquide diminue et il s'enrichit en fayalite, jusqu'à 1480°C où la dernière goutte de liquide ($x_{\text{Fa}}^{\text{l}} = 0,70$) disparaît.



Chaque début ou fin de changement d'état du mélange conduit à un changement de pente dans la courbe d'analyse thermique dont l'allure peut ainsi être représentée par le graphe suivant :



I.5 Cherchons tout d'abord à exprimer la composition molaire du mélange. D'après les données de l'énoncé, on peut calculer la masse molaire de fayalite :

$$M_{\text{Fa}} = 203,7 \text{ g.mol}^{-1}$$

d'où

$$n_{\text{Fa}} = \frac{m_{\text{Fa}}}{M_{\text{Fa}}} = 4,20 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

De même $M_{\text{Fo}} = 140,7 \text{ g.mol}^{-1}$ et $n_{\text{Fo}} = \frac{m_{\text{Fo}}}{M_{\text{Fo}}} = 8,138 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$

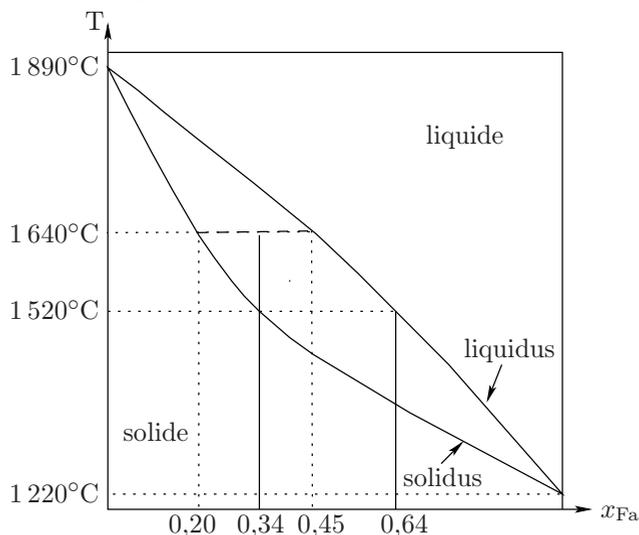
ainsi

$$n_{\text{tot}} = n_{\text{Fa}} + n_{\text{Fo}} = 12,34 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

et la fraction molaire du mélange en fayalite est

$$x_{\text{Fa}}^s = \frac{n_{\text{Fa}}}{n_{\text{tot}}} = 0,34$$

I.6 Ainsi qu'on peut le lire sur le graphe suivant, la première goutte de liquide apparaît lorsque le mélange atteint 1520°C .



Sa composition, donnée par le liquidus à cette température, est

$$x_{\text{Fa}}^\ell = 0,64$$

Mines Physique 1 MP 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

Cette épreuve étudie quelques propriétés d'un tore à travers quatre exercices indépendants.

- Le premier exercice étudie sommairement le « fonctionnement » d'un hula hoop. Les premières questions visent à obtenir l'expression du moment d'inertie du tore autour d'un axe. Seules les deux dernières questions concernent l'étude dynamique proprement dite. Même s'il n'est pas difficile et abordé ici d'une façon un peu originale, le calcul du moment d'inertie n'est pas vraiment dans l'esprit du programme.
- Le deuxième exercice vise à exprimer la résistance d'un conducteur ohmique ayant la géométrie d'un tore. À partir des équations de Maxwell, on redémontre la neutralité d'un conducteur puis on résout l'équation de Laplace qui régit le potentiel électrique, ce qui permet d'établir la loi d'Ohm dans cette géométrie. Très détaillée, la démarche proposée est analogue à celle qui a été effectuée en cours pour un conducteur cylindrique.
- Dans le troisième exercice, on étudie une pince ampèremétrique. Ce dispositif permet, par induction, de mesurer un courant d'intensité importante circulant dans un fil. Un des avantages de ce dispositif est qu'il n'y a pas besoin d'ouvrir le circuit pour insérer l'instrument de mesure, comme on doit le faire pour utiliser un ampèremètre. Le calcul est conduit en passant par la détermination du flux du champ magnétique à travers le tore. On termine en précisant les conditions de fonctionnement d'une telle pince grâce à l'étude de sa fonction de transfert.
- La quatrième partie est une étude thermique d'un objet torique placé dans le vide. Après l'établissement de l'équation de la diffusion thermique dans cette géométrie, on poursuit avec une étude semi-qualitative du profil de température. Pour cela, on détermine d'abord les conditions aux limites, ce qui implique de conduire des raisonnements simples mais qui nécessitent de passer en revue tous les modes de transfert thermique possibles. On termine en utilisant la loi de Stefan.

L'ensemble n'est pas très difficile et reste proche du cours. Seule la dernière partie est un peu plus poussée. Cela en fait tout de même une épreuve relativement difficile à traiter dans le temps imparti puisqu'il faut changer de thématique après seulement quelques questions.

L'ensemble des points abordés dans cette épreuve figure toujours au programme en vigueur à la rentrée 2014.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Le tore peut être vu comme un cylindre « évidé », c'est-à-dire que l'on peut voir un « grand » cylindre comme un « petit » cylindre plus un tore, ce qui permet de trouver J à partir de la question 1.
- 4 Appliquer le théorème de la résultante dynamique au tore. Supposer que le mouvement du tore reste horizontal et remarquer que G a alors un mouvement circulaire uniforme.
- 5 Seule la force d'adhérence a une puissance non nulle. Sans hypothèse supplémentaire sur A , on ne peut pas intégrer l'équation différentielle qui régit l'évolution de Ω mais on peut interpréter $\frac{d\Omega}{dt}$.

Partie II

- 9 En régime permanent, l'équation de Maxwell-Faraday permet d'introduire le potentiel électrique. Utiliser également l'équation de Maxwell-Gauss (avec $\rho = 0$).
- 11 L'intensité I qui traverse une section droite Σ d'un conducteur est

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Partie III

- 14 Supposer que le nombre N de spires est grand. Les sources du champ magnétique sont le courant i_1 dans le tore et le courant i dans le fil. Une étude des symétries et invariances conduit à $\vec{B} = B(r, z, t)\widehat{u}_\theta$. Appliquer ensuite le théorème d'Ampère et vérifier que la composante orthoradiale du champ ne dépend pas de z . Si les courants i_1 et i dépendent du temps, le champ magnétique en dépend.
- 15 Le flux à travers le bobinage est égal à N fois le flux à travers une spire.
- 17 Écrire l'équation électrique soit en considérant des inductances L et M en série avec une résistance R_p , soit en utilisant la loi de Faraday pour déterminer la f.é.m. totale du circuit qui est alors uniquement constitué de la résistance R_p .
- 18 Le principe de la mesure est de mesurer i_1 et d'en déduire i . Il faut donc que la relation liant ces deux grandeurs soit linéaire et indépendante de la forme du signal (notamment de sa pulsation).

Partie IV

- 19 Appliquer le premier principe à la portion torique proposée. La puissance transférée par conduction à travers un cylindre est égale au flux du vecteur densité de courant thermique \vec{j} à travers la surface de ce cylindre.
- 23 Les transferts thermiques peuvent être de trois natures distinctes : conductifs, convectifs ou radiatifs.

DE LA PHYSIQUE AUTOUR D'UN TORE

I. MODÉLISATION D'UN HULAHOOP

1 Par définition, le moment d'inertie d'un solide \mathcal{S} autour d'un axe Δ est

$$J = \int_{M \in \mathcal{S}} r^2 dm$$

où r désigne la distance entre l'axe Δ et le point M . Si \mathcal{S} peut être décrit comme deux solides *disjoints* \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , l'intégrale sur \mathcal{S} est la somme des deux intégrales sur \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 :

$$J_{\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2} = \int_{M \in \mathcal{S}_1} r^2 dm + \int_{M \in \mathcal{S}_2} r^2 dm$$

2 Le moment d'inertie d'un cylindre de hauteur c , de rayon b et de masse M_b est, d'après l'indication de l'énoncé,

$$J_b = \frac{1}{2} M_b b^2$$

Quant à celui d'un cylindre de hauteur c , de rayon a et de masse M_a , c'est

$$J_a = \frac{1}{2} M_a a^2$$

D'après la question précédente, on peut écrire

$$J_b = J_a + J$$

Il ne reste qu'à exprimer les masses des deux cylindres

$$M_a = \mu \pi c a^2 \quad \text{et} \quad M_b = \mu \pi c b^2$$

donc

$$J = \frac{1}{2} \mu \pi c (b^4 - a^4)$$

On pouvait faire un calcul direct à partir de la définition du moment d'inertie

$$J = \int_{z=0}^c \int_{r=a}^b r^2 dm = \int_{z=0}^c \int_{r=a}^b r^2 (2\pi \mu r dr dz) = 2\pi \mu c \int_{r=a}^b r^3 dr$$

Cela conduit bien au même résultat.

3 Le roulement sans glissement peut se traduire formellement par la relation suivante au point de contact I entre l'arbre et le tore :

$$\vec{v}(I \in \text{tore}) = \vec{v}(I \in \text{arbre})$$

Or, l'arbre étant fixe dans le référentiel \mathcal{R}_0 , $\vec{v}(I \in \text{arbre}) = \vec{0}$. En utilisant par ailleurs la relation de cinématique pour un solide dont le vecteur rotation est $\vec{\Omega}$,

$$\vec{v}(I \in \text{tore}) = \vec{v}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI}$$

il vient
$$\vec{v}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = \vec{0}$$

Or,
$$\begin{cases} \vec{v}(G) = OG \dot{\theta} \widehat{u}_\theta = (a-r) \dot{\theta} \widehat{u}_\theta \\ \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = (\Omega \widehat{u}_z) \wedge (-a \widehat{u}_r) = -a \Omega \widehat{u}_\theta \end{cases}$$

Finalement,
$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{a}{a-r} \Omega}$$

D'après le théorème de König, l'énergie cinétique du tore de masse

$$m = \pi \mu c (b^2 - a^2)$$

est la somme de deux termes :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \vec{v}(G)^2 + \mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2} \pi \mu c (b^2 - a^2) [(a-r) \dot{\theta}]^2 + \mathcal{E}_c^*$$

où \mathcal{E}_c^* est l'énergie cinétique barycentrique, qui s'écrit, dans le cas de la rotation autour d'un axe fixe,

$$\mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2} J \Omega^2 = \frac{1}{2} \mu \pi c (b^2 - a^2) \frac{a^2 + b^2}{2} \Omega^2$$

En remplaçant $(a-r) \dot{\theta}$ par $a \Omega$, on obtient bien

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J_0 \Omega^2 \quad \text{avec} \quad J_0 = \pi \mu c (b^2 - a^2) \frac{3a^2 + b^2}{2}}$$

4 Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 , le tore est soumis à

- son poids $-m g \widehat{u}_z$;
- une force de contact au niveau de l'arbre : $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$; la force \vec{N} est la réaction normale et la force \vec{T} , qui traduit les frottements solides, est opposée à la vitesse de glissement.

Compte tenu de la géométrie, on peut écrire a priori, $\vec{N} = N_r \widehat{u}_r$ et $\vec{T} = T_\theta \widehat{u}_\theta + T_z \widehat{u}_z$. Le théorème de la résultante dynamique s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}(G)}{dt} = -m g \widehat{u}_z + N \widehat{u}_r + T_\theta \widehat{u}_\theta + T_z \widehat{u}_z \quad (*)$$

Puisque Ω est supposé constante, il en est de même pour $\dot{\theta}$ en raison du roulement sans glissement. Par conséquent, G a un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et de rayon $(a-r)$ autour du point O, donc

$$\frac{d\vec{v}(G)}{dt} = -(a-r) \dot{\theta}^2 \widehat{u}_r$$

En remplaçant $\dot{\theta}$ par son expression en fonction de Ω , il vient

$$m \frac{d\vec{v}(G)}{dt} = -m \frac{a^2}{a-r} \Omega^2 \widehat{u}_r$$

En projetant la relation (*), on trouve

$$\boxed{N = -m \frac{a^2}{a-r} \Omega^2 \quad T_\theta = 0 \quad T_z = mg}$$

Mines Physique 2 MP 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jimmy Roussel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Nicolas Bruot (ENS Cachan) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

Ce sujet est consacré à trois applications des lasers, pour la mesure de distances, la détection de proximité et le perçage en usine. Hormis la question 18, il est conforme au programme en vigueur à la rentrée scolaire 2014.

- La première partie porte sur la détermination des distances astronomiques. Elle suit une progression historique en commençant par les travaux d'Aristarque de Samos. Ensuite, on s'intéresse à la détermination du rayon orbital des planètes du système solaire à l'aide de la troisième loi de Kepler. Elle se termine par une application rendue possible grâce à l'invention du laser : la télémétrie laser. Cette partie ne présente pas de difficultés particulières.
- Dans la deuxième partie, on aborde le principe du capteur de proximité, dit proximètre. Deux versions laser sont étudiées, l'une permettant la mesure de petites distances, l'autre des grandes. On fait appel ici essentiellement à des connaissances élémentaires d'optique.
- Enfin, la dernière partie est consacrée à l'usinage laser. Après quelques aspects théoriques sur la diffusion thermique, la modélisation d'une opération de perçage laser permet d'estimer la vitesse du processus. Hormis quelques passages calculatoires, cette partie constitue un bon entraînement aux bilans thermiques.

Cette épreuve présente l'intérêt de couvrir de nombreux aspects du programme de première et seconde année : géométrie, mécanique, optique, électronique, thermodynamique, transferts thermiques sont abordés. Réussir cette épreuve exige avant tout une bonne autonomie car peu de résultats intermédiaires sont fournis.

INDICATIONS**Partie I**

1 On pourra utiliser la formule des sinus dans un triangle :

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma}$$

2 Lorsqu'un observateur voit la Lune à demi-pleine, la ligne de visée se confond avec la séparation jour/nuit de la Lune.

3 Utiliser la formule de la question 1.

8 Montrer à l'aide des lois de Snell-Descartes que tout rayon incident repart dans une direction opposée.

9 L'énergie transportée par un photon vaut $h\nu$ avec $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J.s.

Partie II

11 Raisonner dans les triangles O_1O_2P' et O_1OP .

12 Différencier la formule qui relie H et φ puis en déduire δH .

13 Analyser l'influence de la diffraction sur la résolution du dispositif.

16 Considérer le détecteur ponctuel et chercher pour quelle valeur de Ψ un signal est observé.

18 Question hors-programme car sa résolution nécessite de connaître le modèle de l'amplificateur opérationnel idéal.

Partie III

19 Effectuer un bilan d'énergie entre les instants t et $t + dt$ sur une tranche située entre x et $x + dx$.

22 Se souvenir que si $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, alors $F'(x) = f(x)$.

25 Utiliser la distribution de température trouvée à la question 22.

27 Montrer tout d'abord que le champ de température s'écrit $T(x, t) = f(x - vt)$.

28 Poser $y = \frac{dT}{dx}$.

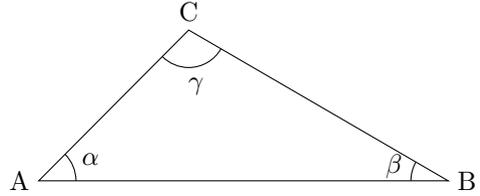
I. UN PEU D'ASTROMÉTRIE

1 On note α , β et γ les angles d'un triangle formé par trois points A, B et C. Alors,

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma}$$

Appliqué au problème de triangulation, sachant que $AB = a$, on obtient

$$\frac{a}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin \beta}$$

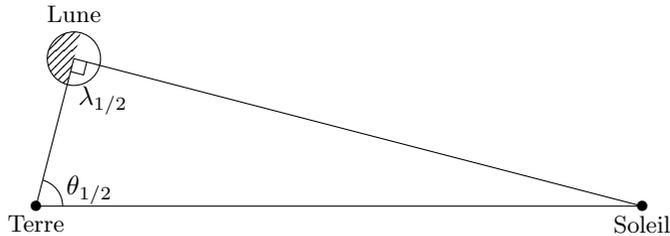


Par ailleurs, dans un espace euclidien, la somme des angles d'un triangle est un angle plat de sorte que $\gamma = \pi - \alpha - \beta$. Comme $\sin(\pi - x) = \sin x$, il vient

$$\boxed{AC = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} a}$$

2 La Lune, éclairée par le Soleil, présente une face sombre hémisphérique (la nuit lunaire) du fait :

1. de l'éloignement du Soleil (les rayons incidents sont quasi parallèles) ;
2. de la forme sphérique de la Lune.



Lorsqu'un observateur voit la Lune à demi-pleine, alors la ligne de visée se confond avec la séparation jour/nuit lunaire comme l'indique la figure. Cette séparation étant perpendiculaire à la direction (SL), on a nécessairement

$$\boxed{\lambda_{1/2} = \frac{\pi}{2}}$$

3 Utilisons la formule de la question 1 dans laquelle A représente la Terre, B, la Lune et C, le Soleil.

$$TS = \frac{\sin \lambda_{1/2}}{\sin(\theta_{1/2} + \lambda_{1/2})} TL$$

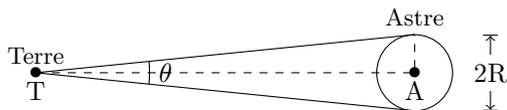
Puisque $\lambda_{1/2} = \pi/2$ et $\sin(x + \pi/2) = \cos x$, on trouve

$$\boxed{\frac{TS}{TL} = \frac{1}{\cos \theta_{1/2}} = 19,1}$$

Aristarque se trompe d'au moins un ordre de grandeur. En effet, la distance Terre-Soleil est de l'ordre de 150 millions de km et celle qui sépare la Lune de la Terre de l'ordre de $4 \cdot 10^5$ km, de sorte que le rapport TS/TL vaut environ 400.

La raison qui explique cet écart important est la grande sensibilité du résultat vis-à-vis de la précision de la mesure de $\theta_{1/2}$. En effet, Aristarque trouve une valeur comprise entre 87° et 90° . Or, si l'on prend 90° pour $\theta_{1/2}$, on trouve un rapport TS/TL infini. Finalement, Aristarque ne parvient qu'à donner une borne inférieure au rapport TS/TL et trouve $TS/TL > 19,1$.

4 Le diamètre apparent θ d'un astre A est l'angle sous lequel un observateur voit celui-ci de la Terre :



La Terre et l'astre A ayant des diamètres petits devant la distance qui les sépare, on peut considérer l'observateur au centre de la Terre et le diamètre apparent suffisamment petit, de sorte que

$$\theta \simeq \frac{2R}{TA}$$

où R est le rayon de l'astre et TA la distance entre l'astre et la Terre.

Lors d'une éclipse de Soleil, le disque solaire est tout juste masqué par la Lune, ce qui implique des diamètres apparents identiques pour ces deux astres. Ainsi, il vient

$$\frac{R_\ell}{TL} = \frac{R_s}{TS}$$

où R_ℓ est le rayon lunaire et R_s celui du Soleil. Par ailleurs, Aristarque trouve que le rayon lunaire est trois fois plus petit que celui de la Terre de sorte que

$$R_\ell = \frac{R_t}{3}$$

ce qui implique

$$\frac{R_t}{3 TL} = \frac{R_s}{TS}$$

finalement,

$$\boxed{\frac{R_s}{R_t} = \frac{TS}{3 TL} > 6,37}$$

À l'époque d'Aristarque, l'hypothèse admise est celle d'un monde géocentrique : tous les astres décrivent des cercles autour de la Terre, le Soleil compris. Or, Aristarque arrive à la conclusion que le Soleil est plus gros que la Terre et il lui semble peu « naturel » de faire tourner une torche (le Soleil) autour d'une mouche (la Terre). Sa remarque constitue donc une première critique du géocentrisme, ceci bien avant le modèle héliocentrique de Nicolas Copernic et sa première confirmation expérimentale en 1727 par James Bradley !

En réalité, Aristarque sous-estime le rapport TS/TL. Le rayon terrestre est de l'ordre de $6,4 \cdot 10^3$ km puisque le méridien mesure $4 \cdot 10^4$ km. Si l'on se souvient que le diamètre apparent du Soleil est de l'ordre du demi-degré, on peut estimer le rayon solaire à l'aide de la formule du diamètre apparent. On trouve environ $7 \cdot 10^5$ km pour le rayon solaire, de sorte que le rapport recherché est de l'ordre de

$$\frac{R_s}{R_t} \sim 100$$

Ainsi, en réalité, le diamètre du Soleil est environ 100 fois plus grand que celui de la Terre.

Mines Chimie MP 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Héroult (Professeur en CPGE); il a été relu par Tiphaine Weber (Enseignant-chercheur à l'université) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Comme c'est généralement l'usage pour l'épreuve de chimie de la filière MP du concours Mines-Ponts, ce sujet s'intéresse à un élément chimique. Cette année, l'étude porte sur le vanadium. L'épreuve comporte cinq petites parties. Sauf à de rares exceptions à l'intérieur d'une même partie, les questions sont indépendantes les unes des autres.

- La première partie traite de structure électronique et de cristallographie. L'habituelle question sur les règles de remplissage des électrons démarre le sujet. Le numéro atomique du vanadium n'est pas donné et l'on utilise la position de l'élément dans la classification périodique pour en déduire la structure électronique. En ce qui concerne la cristallographie, on précise un contact dans un réseau cubique centré et on écrit la maille d'une structure ionique de type NaCl.
- La deuxième partie s'intéresse au diagramme potentiel-pH du vanadium. On commence bien sûr par attribuer les espèces dans les domaines du diagramme. Puis les questions sont variées et nécessitent d'utiliser à bon escient les différentes frontières du tracé pour déterminer la concentration de tracé, le produit de solubilité d'un hydroxyde et un potentiel standard d'oxydoréduction.
- La troisième partie est la plus délicate. Elle concerne les batteries rechargeables à flux de vanadium. Les deux premières questions, très simples, concernent l'établissement de l'équation de réaction de la décharge de la pile ainsi que sa force électromotrice. Puis l'on s'intéresse à la cinétique de cette réaction réalisée en milieu ouvert puisque la pile est un réacteur ouvert parfaitement agité.
- La quatrième partie concerne le titrage rédox d'une espèce du vanadium par les ions permanganate. Les questions sont très classiques et ne présentent pas de difficulté particulière : on établit l'équation du dosage, sa constante d'équilibre et on utilise le volume équivalent pour déterminer la concentration cherchée.
- La cinquième et dernière partie est l'étude thermodynamique d'un équilibre en phase gazeuse. On utilise principalement la relation de Van't Hoff et son intégration entre deux températures, ainsi que la relation d'équilibre entre le quotient réactionnel et la constante d'équilibre.

Au final, cette épreuve est assez courte. Elle peut être traitée dans son intégralité dans le temps imparti, soit seulement 1h30. À l'exception d'une ou deux questions de cinétique en milieu ouvert, les questions posées sont très classiques et surtout parfaitement représentatives de ce qui est attendu des candidats de la filière MP, pour lesquels la chimie n'est évidemment pas la matière principale – mais néanmoins l'une des plus rémunératrices, quand le cours est appris et compris. Ce sujet constitue de ce fait un excellent entraînement pour les sessions futures, les thèmes abordés d'une année sur l'autre dans cette épreuve étant souvent très proches.

INDICATIONS

Partie A

- 1 La position de V dans la classification donne n_{\max} et le nombre d'électrons de valence. L'élément en dessous a le même nombre d'électrons de valence que V.
- 3 L'azote forme l'anion. Quelle est la configuration électronique la plus stable par gain d'électron ? Le cristal est neutre.
- 4 La connaissance des structures n'est plus au programme. La structure NaCl est constituée d'un réseau cubique à faces centrées d'anions, les cations occupant tous les sites octaédriques.

Partie B

- 6 Utiliser la frontière entre les domaines (4) et (5).
- 7 Utiliser le point B.
- 8 Il faut utiliser le point D. La pente de la frontière CD ainsi que le point C permettent de trouver le potentiel en D.

Partie C

- 9 Attention au sens d'écriture de la réaction. La cathode est le pôle + dans une pile en situation de décharge.
- 11 Relier l'intensité I à la vitesse v de la réaction et montrer que v est constante. Les variations de quantités de matière, et de concentrations, sont donc affines.
- 12 Faire un bilan sur les flux molaires $F = Qc$. Supposer que le régime est permanent.
- 13 Question sans intérêt aucun, ne perdez pas votre temps.

Partie D

- 15 Penser à la couleur complémentaire.

Partie E

- 19 Remarquer que la réaction est favorisée à basse température et utiliser la loi de Van't Hoff.
- 20 Écrire un bilan d'avancement faisant intervenir ρ et utiliser la relation à l'équilibre en notant $p(i) = x_i P$ les pressions partielles.
- 21 Calculer les valeurs des constantes d'équilibre aux deux températures et intégrer la loi de Van't Hoff entre ces deux températures.
- 22 Utiliser la relation de la question 20 pour voir l'influence d'une augmentation de P sur le quotient réactionnel. Puis comparer avec K° qui, elle, ne change pas car la température est constante.

AUTOUR DU VANADIUM

A. Structure électronique – cristallographie

1 Les trois règles de remplissage des électrons sont :

- **Règle de Klechkowski** : on remplit les sous-couches par ordre croissant de $n + \ell$, avec n croissant en cas d'égalité.
- **Règle de Hund** : lorsqu'une sous-couche est dégénérée, on place les électrons dans un maximum d'orbitales avec des spins parallèles.
- **Principe d'exclusion de Pauli** : deux électrons ne peuvent pas être décrits par le même quadruplet de nombres quantiques (n, ℓ, m_ℓ, m_s) .

Le vanadium appartient à la 4^e ligne de la classification périodique, le nombre quantique principal n maximal est alors $n = 4$. Comme il est dans la 5^e colonne, il possède 5 électrons de valence ($4s^2 3d^3$, d'après l'ordre de Klechkowski). Appliquons les règles de remplissage :

$$\boxed{\text{V} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^3 4s^2}$$

L'élément en dessous dans la classification périodique occupe la 5^e ligne et la 5^e colonne et possède aussi 5 électrons de valence. Sa configuration électronique est

$$\boxed{1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^3 5s^2}$$

Le numéro atomique du vanadium s'obtient en comptant les électrons, $Z = 23$. L'élément en dessous de lui dans la classification périodique est le niobium Nb ($Z = 41$).

2 Dans la maille d'un système cubique centré (atomes aux sommets et au centre du cube), il y a contact le long de la diagonale du cube donc

$$a\sqrt{3} = 4R$$

d'où

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{4} \approx 130 \text{ pm}}$$

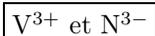
Le jury précise tous les ans dans son rapport qu'il est indispensable de savoir faire les opérations élémentaires de calcul pour donner des applications numériques précises. On note ici en remarque les détails permettant de faire les calculs à la main. La valeur approchée de $\sqrt{3}$ est donnée.

$$R = \frac{300 \times 7/4}{4} = \frac{75 \times 7}{4} = \frac{525}{4} \approx 130 \text{ pm}$$

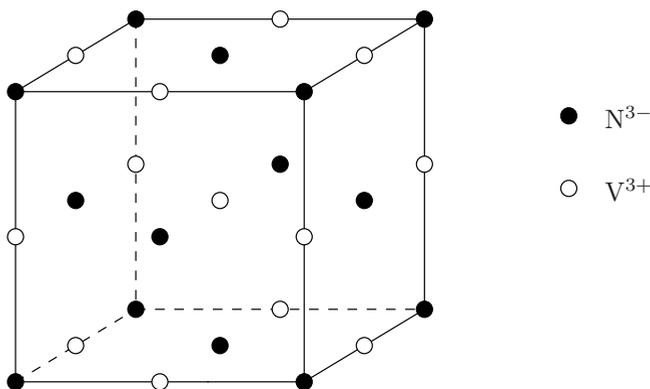
3 L'azote est plus électronégatif que le vanadium, il a donc tendance à former l'anion et le vanadium le cation (comme tous les éléments de transition). Le numéro atomique de l'azote est $Z = 7$ donc sa configuration électronique est

$$\text{N} : 1s^2 2s^2 2p^3$$

Il peut ainsi gagner 3 électrons pour atteindre une structure isoélectronique du gaz noble de sa période (Ne). Le vanadium, lui, perd 3 électrons pour assurer la neutralité du cristal.



4 La maille du nitrure de vanadium, de type NaCl, est constituée d'un réseau cubique à faces centrées de N^{3-} , les ions V^{3+} occupant tous les sites octaédriques.



Les cations occupent des sites octaédriques donc la coordination cation/anion est **[6]**.

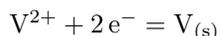
La connaissance précise des structures ioniques à partir de leur famille (ici NaCl) n'est plus explicitement au programme depuis la rentrée 2014. À l'avenir, les énoncés devront préciser la disposition des ions, comme ici dans les indications.

B. Diagramme potentiel-pH

5 Dans un diagramme potentiel-pH, les espèces les plus hautes sont celles dont le degré d'oxydation est le plus élevé. Par ailleurs, les hydroxydes solides n'existent que pour des pH plus élevés que les domaines des ions libres et se situent par conséquent à droite dans le diagramme. On obtient alors les domaines suivants :

d.o.	espèces (domaines)	
+V	VO_2^+ (1)	$\text{VO}_2(\text{OH})_{(s)}$ (6)
+IV	VO^{2+} (2)	$\text{VO}(\text{OH})_{2(s)}$ (7)
+III	V^{3+} (3)	$\text{V}(\text{OH})_{3(s)}$ (8)
+II	V^{2+} (4)	$\text{V}(\text{OH})_{2(s)}$ (9)
0	$\text{V}_{(s)}$ (5)	

6 Considérons le couple $\text{V}^{2+}/\text{V}_{(s)}$ dont le potentiel standard est $E^\circ = -1,18 \text{ V}$.



Le potentiel de Nernst pour ce couple s'écrit

$$E = E^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{[\text{V}^{2+}]}{c^\circ}$$

Centrale Physique MP 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stanislas Antczak (Professeur agrégé) ; il a été relu par Michel Fruchart (ENS Lyon) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

L'épreuve, intitulée « Les télescopes infrarouges », comporte cinq parties largement indépendantes traitant de divers aspects de l'observation des rayonnements infrarouges venus de l'espace, à l'aide de dispositifs variés comme le VLT (*Very Large Telescope*) au Chili.

- La première partie traite de généralités sur les ondes électromagnétiques. Via un bilan thermique en régime permanent, puis en régime sinusoïdal forcé, un détecteur de flux lumineux infrarouge appelé bolomètre est ensuite étudié.
- La deuxième partie traite des télescopes Cassegrain utilisés dans le VLT. Elle aborde ainsi brièvement l'optique géométrique, puis la diffraction. Cette partie ne peut pas être réalisée dans le cadre du nouveau programme.
- La troisième partie mène une étude très détaillée d'un télescope interférentiel. On calcule l'intensité lumineuse produite par interférences, puis on évalue la limite de résolution angulaire de ce dispositif.
- Une courte quatrième partie aborde des aspects mécaniques du positionnement du télescope spatial James Webb ; il y est question d'un point de Lagrange et de sa stabilité.
- Enfin, la cinquième partie traite plus en profondeur le cas du refroidissement du télescope Herschel. On étudie le principe d'un interrupteur thermique, puis le fonctionnement du cryo-réfrigérateur.

Globalement, ce sujet est très guidé. À plusieurs reprises, il comporte des enchaînements de questions élémentaires permettant d'avancer vite. Pour autant, il n'est pas toujours simple car les dispositifs étudiés sont complexes. Par endroits, l'énoncé est difficile à comprendre et il faut le relire plusieurs fois pour éviter les contresens ou les oublis.

Les différents thèmes abordés couvrent une vaste palette de domaines de la physique : thermodynamique, optique géométrique, optique physique, mécanique. Chaque partie peut être traitée comme un exercice, indépendant du reste du sujet. Lors de l'épreuve, un tel découpage permet de grappiller des points un peu partout.

INDICATIONS

Partie I

- I.A.4 Calculer λ_{\max} pour un corps sur Terre et dans l'espace.
- I.B.2 Faire un bilan énergétique sur le bolomètre.
- I.C.1 Identifier les températures initiale et asymptotique.
- I.D.4 Étudier les régimes asymptotiques comme pour un filtre électrique.

Partie II

- II.A.3 À quelle condition le système est-il afocal ?
- II.A.4 Tracer un schéma de principe avec un rayon arrivant sur le miroir primaire en passant par le foyer, et y faire apparaître les angles.
- II.B.1 Une tache d'Airy a pour ouverture angulaire $1,22 \lambda/D$.
- II.B.3 Utiliser le critère de Rayleigh.

Partie III

- III.A.3 Y aurait-il symétrie, dans le dispositif réel, sans la ligne à retard ?
- III.A.4 Y a-t-il cohérence avec une différence de marche de cent mètres ?
- III.A.6 Faire un schéma de principe en se souvenant qu'à partir de l'entrée dans la lentille, les chemins optiques sont identiques.
- III.B.2 Quelle différence de marche supplémentaire est introduite par le fait que l'incidence est non normale ?
- III.C.4 Privilégier le tracé d'un graphe pour identifier i_B .
- III.C.5 Le brouillage pour l'angle le plus petit possible est observé pour $a = 100$ m.

Partie IV

- IV.A.1 Utiliser la troisième loi de Kepler.
- IV.B.1 La force d'inertie d'entraînement a pour norme $m \Omega^2 (R + r)$, où Ω s'exprime en fonction de T_T déterminée précédemment.
- IV.B.2 Faire un développement limité au premier ordre en r/R .
- IV.C.2 Quels sont les effets des variations de x , y et z sur les forces, donc sur le mouvement ultérieur du satellite ?

Partie V

- V.A.4 Une conductance thermique est un flux divisé par un écart de température. C'est un nombre positif.
- V.B.1 L'équilibre liquide-vapeur est toujours réalisé.
- V.B.3 Faire un bilan sur la masse de liquide à la date t .
- V.B.4 Bien relire le préambule de la partie V avant de commencer les schémas.

LES TÉLESCOPES INFRAROUGES

I. DÉTECTION DE RAYONNEMENT INFRAROUGE

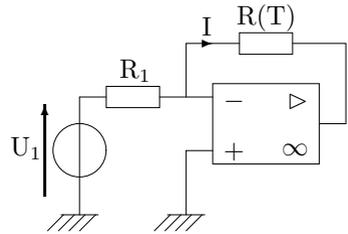
I.A.1 Les **photorésistances**, les **photodiodes** et les **phototransistors** sont des composants électroniques permettant la détection d'ondes électromagnétiques. Ils sont sensibles en général dans les domaines UV, visible et infrarouge. Les **antennes**, elles, sont utilisées pour les ondes radio.

I.A.2 Les rayonnements électromagnétiques infrarouges ont des longueurs d'ondes comprises approximativement **entre 800 nm et 1 mm**.

I.A.3 La longueur d'onde λ_{\max} de la loi de Wien est la **longueur d'onde du maximum d'émission du corps noir à l'équilibre thermique à la température absolue T**.

I.A.4 La température sur Terre est voisine de 300 K ; elle est de 10 K dans l'espace. Les longueurs d'ondes λ_{\max} des maxima d'émissivité des corps noirs à l'équilibre thermique à ces températures sont respectivement voisines de 10 μm et 0,3 mm, toutes deux dans l'infrarouge. Les spectres des corps noirs à ces températures sont ainsi riches en infrarouges. Un télescope doit alors être refroidi **pour éviter qu'il ne détecte les infrarouges qu'il produit lui-même**.

I.B.1 Le montage suivant constitue un **générateur de courant** : si l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, le bolomètre de résistance $R(T)$ est parcouru par un courant d'intensité $I = U_1/R_1$.



I.B.2 Le bolomètre reçoit une puissance lumineuse Φ_i et une puissance Joule $P_J = R(T) I^2$. Par ailleurs, il cède à la source froide la puissance $P_f = G_{\text{th}} (T - T_S)$. Sa capacité thermique étant C_{th} , le bilan énergétique s'écrit

$$C_{\text{th}} \frac{dT}{dt} = \Phi_i + P_J - P_f$$

soit
$$C_{\text{th}} \frac{dT}{dt} = \Phi_i + R_0 I^2 + \alpha R_0 (T - T_S) I^2 - G_{\text{th}} (T - T_S)$$

On obtient alors l'équation différentielle

$$-C_{\text{th}} \frac{dT}{dt} + (\alpha R_0 I^2 - G_{\text{th}}) T = (\alpha R_0 I^2 - G_{\text{th}}) T_S - \Phi_i - R_0 I^2$$

qui se met sous la forme

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = \beta(\Phi_i)$$

avec

$$\tau = \frac{C_{\text{th}}}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2} \quad \text{et} \quad \beta(\Phi_i) = T_S + \frac{\Phi_i + R_0 I^2}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2}$$

I.B.3 Les solutions d'une équation différentielle de ce type sont de la forme

$$T(t) = A e^{-t/\tau} + B$$

Pour que l'exponentielle ne diverge pas lorsque t devient grand, il faut que τ soit positif, donc que $G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2$ soit positif. Si α est négatif, ceci est vrai quels que soient G_{th} , R_0 et I . **Un coefficient α négatif garantit bien la stabilité du fonctionnement du dispositif.**

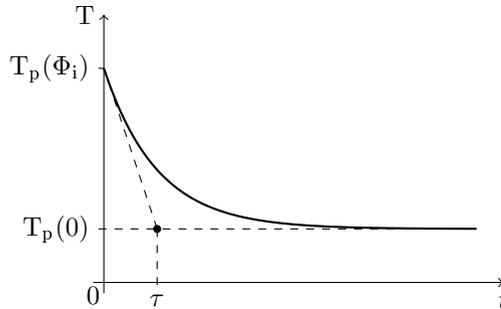
I.B.4 En régime permanent, la température est $T_p(\Phi_i) = \beta(\Phi_i)$, soit encore

$$T_p(\Phi_i) = T_S + \frac{\Phi_i + R_0 I^2}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2}$$

I.C.1 Initialement, la température est $T_p(\Phi_i)$. Lorsqu'on supprime le flux incident, elle décroît pour tendre vers $T_p(0)$. L'expression de $T(t)$ est alors

$$T(t) = T_p(0) + (T_p(\Phi_i) - T_p(0)) e^{-t/\tau}$$

Cela permet de tracer le graphe suivant, où apparaît la constante de temps τ :



La constante de temps τ est l'abscisse de l'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote horizontale. C'est la durée caractéristique du régime transitoire, qui représente le **temps de réponse** du bolomètre.

I.C.2 D'après la question I.B.2, lorsque la capacité thermique C_{th} augmente, τ augmente : **plus le bolomètre peut stocker de l'énergie thermique, plus le régime transitoire est long.** Lorsque la conductance thermique G_{th} augmente, τ diminue : **plus la conduction thermique permettant d'évacuer l'énergie thermique est facile, plus le régime transitoire est court.**

I.D.1 En régime forcé, l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ s'écrit

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = T_S + \frac{\Phi_i(t) + R_0 I^2}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2} \quad \text{avec} \quad \Phi_i(t) = \Phi_{i0} + \varphi_0 \cos(\omega t)$$

La température d'équilibre T_1 est donc

$$T_1 = T_S + \frac{\Phi_{i0} + R_0 I^2}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2}$$

En introduisant $\Theta(t) = T(t) - T_1$, on obtient l'équation différentielle

$$\tau \frac{d\Theta}{dt} + \Theta = \frac{\varphi_0 \cos(\omega t)}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2}$$

Centrale Physique et Chimie MP 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Kim Larmier (ENS Ulm) ; il a été relu par Cyril Jean (ENS Ulm) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet développe quelques aspects de la physico-chimie de l'atmosphère et d'un instrument de télédétection par laser permettant son étude : le LIDAR.

Il donne l'occasion d'exploiter une très large partie du programme de physique et de chimie, en proposant des problèmes assez proches du cours. Les quatre parties sont totalement indépendantes, si bien que le sujet peut être commencé indifféremment par l'une ou l'autre, mais les parties elles-mêmes sont relativement cohérentes – à l'exception de la quatrième.

- Le sujet débute par l'étude de l'interaction avec l'atmosphère du rayonnement émis par un LIDAR. Un raisonnement énergétique macroscopique est tenu dans un premier temps, puis l'aspect microscopique du problème est abordé à travers le rayonnement dipolaire. Quelques questions de cristallographie sont posées.
- La deuxième partie se penche, sous l'angle de la thermodynamique, sur la production par l'homme de dioxyde de carbone rejeté dans l'atmosphère : étude d'un moteur thermique, changements d'état et thermochimie de la réaction de combustion de l'octane sont au programme.
- La troisième partie examine les processus chimiques potentiellement responsables de la formation des pluies acides, ce qui est l'occasion de mettre en application ses connaissances en chimie des solutions.
- Le sujet s'achève sur une partie hybride, regroupant une analyse de l'équilibre vertical de l'atmosphère avant de revenir au LIDAR et aux ondes électromagnétiques pour aborder une méthode de mesure de la vitesse du vent.

L'épreuve est d'une difficulté modérée et d'une longueur raisonnable. Les différents thèmes sont bien amenés, quoique sans originalité.

Avec les indications fournies dans ce corrigé, il est possible de traiter ce sujet dans le cadre des programmes entrés en vigueur en 2014 car l'immense majorité des questions leur est conforme.

INDICATIONS

Partie I

- I.A.1.a On reçoit à t un mélange de toutes les émissions entre t_0 et $t_0 + t_\ell$.
- I.A.2 Réaliser un bilan de puissance sur la tranche de fluide décrite dans l'énoncé.
- I.C.2 L'éclairement \mathcal{E}_0 défini dans l'énoncé est en fait un éclairement surfacique. Il s'exprime $\langle \vec{R}_0 \cdot d\vec{S} \rangle / dS$, \vec{R}_0 étant le vecteur de Poynting de l'onde incidente.
- I.D.1.c Ne pas être déstabilisé par le fait de trouver un nombre d'aluminium par maille non-entier : une certaine fraction des sites octaédriques est occupée, sur l'ensemble du cristal. L'important est que la composition chimique moyenne d'une maille respecte celle du cristal.
- I.D.2.b Une substitution doit conserver l'électronéutralité de la structure !

Partie II

- II.C L'octane est instantanément vaporisé dès son introduction dans le moteur. Il faut alors considérer le mélange air/octane comme un gaz parfait.
- II.D.4 Comparer la pression partielle d'octane (elle est bien sûr inférieure à P_2) dans le moteur dans ces conditions et sa pression de vapeur saturante.
- II.I Utiliser les lois de Le Châtelier et Van't Hoff.

Partie III

- III.B.1 La molécule de CO_2 est linéaire tandis que la molécule de SO_2 est coudée.
- III.B.3.c Vérifier le résultat à la lumière de la loi de Van't Hoff.
- III.C.3 Envisager un déplacement d'équilibre.

Partie IV

- IV.A.1.a L'expression de la force de pression $d\vec{F}$ exercée sur un élément de surface dS centré en M est : $d\vec{F} = P(M) dS \vec{n}$, où \vec{n} est le vecteur normal à la surface. La résultante des forces de pression sur le volume proposé par l'énoncé se calcule alors en 3 termes : la force exercée sur la section supérieure, celle exercée sur la section inférieure et celle sur la section latérale. Un argument de symétrie permet d'annuler simplement cette dernière.
- IV.A.2.b Utiliser la différentiation logarithmique.
- IV.A.2.f Que dire de $T(z)$ lorsque $z \rightarrow +\infty$?
- IV.A.3.c La résultante des forces de pression est égale à la poussée d'Archimède, c'est-à-dire l'opposé du poids d'un volume d'air qui occuperait exactement le volume de la particule de fluide.
- IV.A.3.d Il faut exprimer $\rho_i(z)$ en fonction des gradients thermiques. Considérer que la particule et le fluide ambiant ne subissent pas la même évolution thermique.
- IV.B.1.b La composante tangentielle du champ électrique est toujours continue.
- IV.B.2.d Le calcul de la moyenne sur τ_D d'une fonction dépendante du temps nécessite de comparer la durée caractéristique d'évolution de cette fonction et τ_D .
- IV.B.2.e Quels sont les principaux avantages d'un laser par rapport à une lampe classique ?

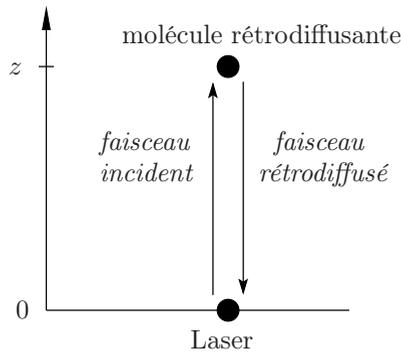
I. LIDARS ATMOSPHÉRIQUES

I.A.1.a L'impulsion rayonnée par une molécule en z doit parcourir l'aller-retour entre le laser et ladite molécule, soit la distance $d = 2z$. La lumière parcourt cette distance pendant l'intervalle de temps

$$t - t_0 = \frac{d}{c} = \frac{2z}{c}$$

soit

$$t = t_0 + \frac{2z}{c}$$



Ce résultat vaut pour une impulsion infiniment brève émise à t_0 . En réalité, l'impulsion a une certaine durée et peut être considérée comme une succession d'impulsions infiniment brèves émises entre t_0 et $t_0 + t_\ell$. À la date t , arrivent au récepteur simultanément toutes les impulsions émises dans cet intervalle de temps. La dernière a alors atteint l'altitude $z - \Delta z$ telle que

$$t = t_0 + \frac{2z}{c} = (t_0 + t_\ell) + \frac{2(z - \Delta z)}{c}$$

dont on tire

$$\Delta z = \frac{c t_\ell}{2} = 1,05 \text{ m}$$

I.A.1.b Le risque est que les signaux issus de deux impulsions successives – ayant donc atteint des altitudes différentes – arrivent simultanément au récepteur. Le signal relatif aux deux hauteurs atteintes se trouve alors superposé. Considérons deux impulsions consécutives, émises respectivement à t_0 et $t_0 + T_\ell$, T_ℓ étant la période des impulsions ($T_\ell = F_\ell^{-1}$). Les signaux issus de ces deux impulsions arrivent au même instant t au récepteur si les couches de l'atmosphère qui les rétrodiffusent sont séparées d'une hauteur z_{\max} telle que

$$t = t_0 + \frac{2z}{c} = (t_0 + T_\ell) + \frac{2(z + z_{\max})}{c}$$

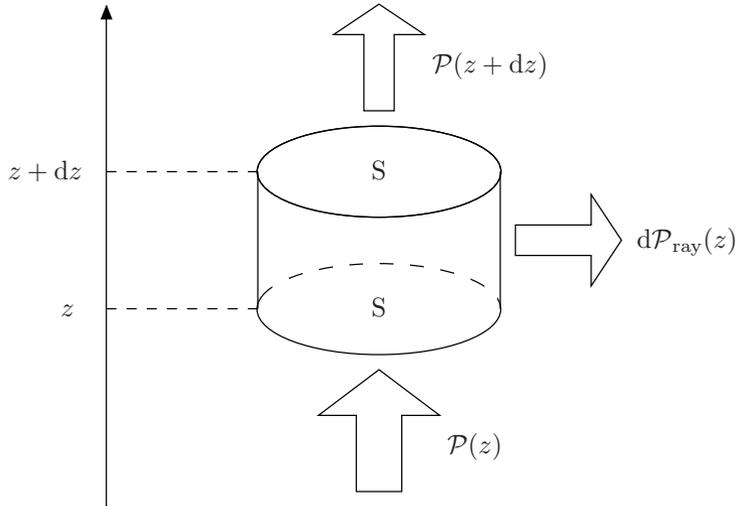
soit

$$z_{\max} = \frac{c T_\ell}{2} = \frac{c}{2 F_\ell} = 7500 \text{ km}$$

Cette valeur étant très supérieure à 12 km, il n'y a pas de superposition entre les signaux issus d'impulsions consécutives, **il est donc possible de sonder correctement l'atmosphère jusqu'à une telle hauteur.**

L'épaisseur de l'atmosphère est considérée égale à environ 100 km. Au-delà, il n'y a presque plus de molécules pour rétrodiffuser le signal du LIDAR.

I.A.2 Réalisons un bilan de puissance sur une tranche d'atmosphère de section S comprise entre les cotes z et $z + dz$.



Cette portion de fluide reçoit algébriquement

- la puissance du laser incident en z : $+\mathcal{P}(z)$;
- la puissance du laser émergent en $z + dz$: $-\mathcal{P}(z + dz)$;
- la puissance rayonnée par l'atmosphère vers l'extérieur : $-d\mathcal{P}_{\text{ray}}(z)$.

Considérons que l'atmosphère ne s'échauffe pas sous l'action du laser, si bien que la somme de ces puissances doit être nulle. Ainsi, on écrit

$$0 = \mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(z + dz) - d\mathcal{P}_{\text{ray}}(z)$$

soit
$$\mathcal{P}(z + dz) - \mathcal{P}(z) = -d\mathcal{P}_{\text{ray}}(z)$$

ou encore
$$\frac{d\mathcal{P}}{dz} dz = -d\mathcal{P}_{\text{ray}}(z)$$

En substituant à $d\mathcal{P}_{\text{ray}}$ l'expression proposée, on trouve l'équation différentielle vérifiée par $\mathcal{P}(z)$:

$$\boxed{\frac{d\mathcal{P}}{dz} = -\alpha(z)\mathcal{P}(z)}$$

Séparons les variables :

$$\frac{d\mathcal{P}}{\mathcal{P}} = -\alpha(z)dz$$

et intégrons entre $z = 0$ et z :

$$\ln\left(\frac{\mathcal{P}(z)}{\mathcal{P}_0}\right) = -\int_0^z \alpha(u) du$$

On obtient alors

$$\boxed{\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}_0 \exp\left(-\int_0^z \alpha(u) du\right)}$$

Ce type d'expression est caractéristique pour décrire l'atténuation d'un rayonnement à la traversée d'un milieu. La loi de Beer-Lambert peut

X Physique MP 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (Professeur en CPGE), il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet est conforme au nouveau programme. Il est composé de quatre parties et s'intéresse au principe de fonctionnement de capteurs de mouvement : deux accéléromètres et un gyromètre d'utilisation courante dans les objets du quotidien.

- Dans la première partie, on décrit un accéléromètre constitué d'un système masse-ressort. Après avoir établi l'équation du mouvement, on analyse la durée de réponse du système. On montre qu'une fois cette durée écoulée, la position de la masselotte permet d'accéder à l'accélération. Cette partie fait appel au cours sur la réponse indicielle d'un oscillateur mécanique amorti dans un référentiel non galiléen.
- La deuxième partie porte sur la méthode de mesure capacitive de la position de la masselotte. On fabrique un condensateur dont l'une des armatures est solidaire de la masselotte. La capacité de ce condensateur est directement liée à la position de la masselotte. On constate alors que la mesure de la position de la masselotte est faussée par la force électrostatique s'exerçant entre les armatures. Un dispositif à trois armatures permet de s'en affranchir et réalise une conversion linéaire tension-position.
- C'est un accéléromètre « vibrant » qui fait l'objet de la troisième partie. Cette fois, la masselotte est immobile et coincée entre deux poutres vibrantes, excitées à leur fréquence propre. La mise en mouvement de ce système entraîne une variation de la contrainte exercée par la masselotte sur les poutres et conduit à un décalage des fréquences propres. Il s'agit d'explicitier le lien entre la force exercée par la masselotte et la pulsation propre en écrivant successivement les énergies cinétique et potentielle de chaque poutre. Cette partie est très intéressante et aussi plus calculatoire que les précédentes car elle fait appel à des raisonnements sur des éléments de longueur, essentiels pour le physicien.
- La quatrième partie présente le principe de fonctionnement d'un gyromètre laser à effet Sagnac. On commence par établir la formule du décalage par effet Doppler, qui n'était pas au programme en 2014 mais doit être dorénavant connu des étudiants. On applique alors cette formule au gyromètre et on montre que l'intensité enregistrée par un photodétecteur en sortie de l'interféromètre est liée à la vitesse de rotation du gyromètre.

Cette épreuve de difficulté progressive mêle avec harmonie calculs, sens physique et maîtrise du cours. Elle est d'autant plus intéressante qu'elle présente des techniques de mesure très répandues sur lesquelles il est souhaitable d'avoir quelques idées.

INDICATIONS

- 1 Considérer un mouvement sinusoïdal effectué avec le bras. Quelle est typiquement son amplitude ? Compter le nombre d'oscillations lorsque le bras oscille rapidement ou bien lentement.
- 2 Prendre en compte la force d'inertie d'entraînement qui s'écrit $-ma(t)\vec{e}_x$.
- 6 Pour chaque régime, le temps de réponse est égal à la durée caractéristique du régime transitoire.
- 11 Reprendre le théorème de la résultante dynamique (question 2) et projeter sur \vec{u} .
- 14 Quel lien existe-t-il entre la force ressentie par l'armature portant la charge q et le champ électrique dû à l'autre armature ?
- 16 Dessiner le schéma électrique équivalent au circuit contenant deux condensateurs en série, modélisant les interactions électrostatiques entre chaque paire d'électrodes voisines. Traduire la nullité de la charge totale de l'armature centrale.
- 19 Noter $T(x_i)$ la tension exercée par la partie située en $x > x_i$ sur la partie située en $x < x_i$ et écrire le théorème de la résultante dynamique.
- 21 Écrire qu'un élément de poutre de longueur dx situé à l'abscisse x possède une énergie cinétique $dE_c(t)$ qui s'écrit $M/L dx \times \dot{y}^2/2$.
- 22 La longueur d'un élément de poutre s'écrit $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ et $\delta(x) = ds - dx$.
- 23 L'énergie potentielle de la poutre est le produit de la tension multipliée par l'élongation de toute la poutre.
- 24 κ est le coefficient de raideur du ressort dont l'élongation est $ud\theta - dx$. L'énergie potentielle de courbure s'écrit

$$d^2E_{\text{courbure}}(x, t) = \frac{\kappa}{2} (ud\theta - dx)^2$$

- 25 Montrer que
$$\frac{(d\theta)^2}{dx} \simeq \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx$$
- 26 Expliciter la relation $E_m = E_c + E_{\text{tension}} + E_{\text{courbure}}$ comme une somme d'intégrales portant sur Y et ses dérivées. Dérivée cette relation par rapport au temps.
- 27 La moyenne sur une période de $\cos x$ et $\sin x$ est nulle. Celle de $\cos^2 x$ vaut $1/2$.
- 29 Montrer que $v_{\perp}(t_2 - t_1) = d \cos \theta - c \cos \theta(t_2 - t_1)$.
- 30 Considérer les points A_1 et A_2 à l'instant t_2 .
- 32 De la question 31, déduire l'expression de ω' . Développer cette expression à l'ordre 1 en v_{\perp}/c . Utiliser la relation $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$.
- 35 La vitesse de chaque élément (miroirs et lame) est orthoradiale.
- 36 Montrer que $\omega_a = \omega_{\ell}$ et utiliser la formule de la question 33 pour exprimer ω_t .
- 38 Utiliser de nouveau la formule de la question 33 (pour le faisceau trigonométrique), pour démontrer que les ondes ont la même pulsation en sortie de la lame.
- 41 Négliger la correction due à l'indice optique qui n'importe pas sur le premier chiffre significatif.

CENTRALE INERTIELLE

I. ÉTUDE D'UN ACCÉLÉROMÈTRE PENDULAIRE

1 Lorsqu'un joueur agite rapidement la manette, on peut estimer que la manette effectue des oscillations dont l'amplitude vaut environ 0,1 m, à raison de 5 oscillations du bras par seconde. Dans ce cas, le mouvement oscillatoire de la manette est bien décrit par une loi de la forme :

$$X(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$$

avec $A = 0,1$ m et $\Omega = 5 \times 2\pi$ rad.s⁻¹. Dans ces conditions,

$$|\ddot{X}| \simeq A\Omega^2 = 1.10^2 \text{ m.s}^{-2}$$

Divisons cette accélération par g (pour l'exprimer en g). Il apparaît que

L'accélération subie par la manette lors de mouvements rapides vaut typiquement 10 g , ce qui est un peu supérieur à la valeur maximale du constructeur mais du même ordre de grandeur.

Concrètement, ce résultat montre qu'il ne sert à rien de secouer trop violemment la manette.

On peut estimer que les mouvements lents correspondent à des oscillations d'amplitude $A = 0,1$ m à 0,2 Hz (une oscillation dure 5 s). Le même calcul que précédemment conduit à $|\ddot{X}| \simeq 2.10^{-1}$ m.s⁻² et

L'accélération subie par la manette lors d'un mouvement lent vaut typiquement 0,01 g , ce qui est du même ordre de grandeur que la valeur minimale du constructeur.

2 Appliquons le théorème de la résultante cinétique à la masselotte dans le référentiel non galiléen du boîtier,

$$m\ddot{X}\vec{e}_x = m\vec{g} + \vec{N} - k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x - 2\gamma m\dot{X}\vec{e}_x + \vec{F}_i$$

où \vec{F}_i est la résultante des forces d'inertie et \vec{N} la réaction normale à Ox du support. Projetons cette relation sur l'axe Ox horizontal,

$$m\ddot{X} = -k(\ell - \ell_0) - 2\gamma m\dot{X} + \vec{F}_i \cdot \vec{e}_x$$

D'après l'énoncé, $X = \ell - \ell_{\text{équilibre}}$. Or à l'équilibre, $\ddot{X} = \dot{X} = 0$ et l'équation précédente impose que $\ell_{\text{équilibre}} = \ell_0$. Par conséquent, $X = \ell - \ell_0$. De plus, l'accélération du boîtier est unidirectionnelle donc la force d'inertie est restreinte à la force d'inertie d'entraînement, qui s'écrit dans ce cas

$$\vec{F}_i = -ma(t)\vec{e}_x$$

L'équation du mouvement sur l'horizontale s'écrit

$$m\ddot{X} = -kX - 2\gamma m\dot{X} - ma(t)$$

Transférons tous les termes en X dans le membre de gauche et divisons par m pour faire apparaître la pulsation ω_r :

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_r^2 X = -a(t)$$

On suppose l'absence de frottement solide : ce n'est pas explicitement précisé par l'énoncé, même si c'est probablement sous-entendu par le choix de la modélisation par un « système masse-ressort amorti ».

3 On cherche la solution particulière X_p sous la forme d'une constante. Dans ce cas $\ddot{X}_p = \dot{X}_p = 0$ et l'équation du mouvement impose

$$X_p = -\frac{a}{\omega_r^2}$$

L'équation sans second membre s'écrit

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_r^2 X = 0$$

D'après le cours, le facteur de qualité Q de ce système s'écrit

$$Q = \frac{\omega_r}{2\gamma}$$

Dans le cas faiblement amorti, $Q > 1/2$, ce qui correspond à $\gamma < \omega_r$. Les solutions X_H de l'équation du mouvement sans second membre sont donc de la forme

$$X_H(t) = Ae^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2} t + \varphi\right) \quad (\text{pour } \gamma < \omega_r)$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation du mouvement de la masselotte, soumise à une accélération constante a , s'écrit

$$X(t) = Ae^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2} t + \varphi\right) - \frac{a}{\omega_r^2} \quad (\text{pour } \gamma < \omega_r)$$

Dans le cas fortement amorti, $Q < 1/2$ (alors $\gamma > \omega_r$) et les solutions X_H de l'équation du mouvement sans second membre sont de la forme

$$X_H(t) = A'e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2})t} + B'e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2})t} \quad (\text{pour } \gamma > \omega_r)$$

Il s'ensuit que la solution générale de l'équation du mouvement de la masselotte, soumise à une accélération constante a , s'écrit

$$X(t) = A'e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2})t} + B'e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2})t} - \frac{a}{\omega_r^2} \quad (\text{si } \gamma > \omega_r)$$

4 Dans tous les cas, les exponentielles réelles tendent à s'annuler aux temps longs si bien que

$$X \text{ tend vers } -a/\omega_r^2 \text{ lorsque } t \text{ tend vers } +\infty.$$

X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2014

Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieur) ; il a été relu par Vincent Freulon (Professeur en CPGE) et Julien Dumont (Professeur en CPGE).

Le thème de ce sujet est la photoluminescence et le traitement du signal spécifique qui lui est appliqué. Rappelons que la photoluminescence est l'émission de lumière par un dispositif préalablement excité, ce dernier pouvant revêtir plusieurs formes. Ici, l'excitation est réalisée par un rayon laser. La photoluminescence se décompose en fluorescence et phosphorescence, selon le délai entre excitation et réémission. Deux grandes parties sont proposées.

- La partie 1 cherche à quantifier le nombre de photons réémis. Si elle aborde la théorie des semi-conducteurs, aucune notion dans ce domaine n'est supposée connue. Il s'agit de savoir faire des bilans de particules, en utilisant les résultats habituels du cours sur la diffusion, et de raisonner par homogénéité. Cette partie est assez peu classique et teste le sens physique.
- Dans la partie 2, on s'intéresse au traitement du signal, étudié en trois sous-parties. Tout d'abord, on considère un dispositif de détection synchrone, dont le but est de distinguer le signal du bruit, par un traitement analogique. Ensuite, on travaille sur un traitement numérique du signal : conversion analogique-numérique par échantillonneur-bloqueur puis conversion numérique-analogique par réseau R-2R. Enfin, le sujet s'achève sur la comparaison de différentes sources de bruit. En dépit de quelques modélisations hasardeuses, cette partie est abordable.

Ce sujet est assez atypique. La partie physique reste limitée et s'attache surtout aux principes les plus simples. Elle évalue essentiellement le sens physique et la capacité de compréhension. La deuxième partie ne relève pas des sciences de l'ingénieur mais plutôt de la physique appliquée. Les questions y sont relativement bien guidées, mais certaines sont mal posées ou comportent des erreurs. À l'exception des questions faisant appel à un amplificateur opérationnel, ce sujet est conforme à l'esprit (et au contenu) du programme en vigueur depuis la rentrée 2014.

INDICATIONS

Partie 1

- 4 Se demander si les photons incidents ont une énergie supérieure à la largeur de bande interdite.
- 5 Supposer β constant, résoudre l'équation différentielle constituée par sa définition.
- 7 Considérer l'évolution des photons qui entrent dans un volume infinitésimal. Le nombre de paires électrons-trous créés par unité de temps est égal au taux de génération d'électrons photoexcités. Erreur d'énoncé : le facteur $1/h\nu_0$ ne devrait pas être présent dans l'expression (1).
- 10 Simplifier l'expression fournie à la question 9 en supposant $n \ll n_0 + p_0$.
- 11 La variation du nombre d'électrons dans un volume infinitésimal résulte de l'entrée et de la sortie d'électrons par diffusion, de la génération et des recombinaisons.
- 14 Le coefficient de diffusion a la dimension d'une surface par unité de temps.
- 16 Le flux n'est plus continu en $x = 0$: les électrons sont consommés en surface.
- 18 Raisonner de la même manière que dans la question 5 afin de calculer le flux élémentaire créé par une tranche infinitésimale de matériau. Sommer ensuite tous ces flux élémentaires au niveau du détecteur.
- 19 Utiliser l'expression de $n(x)$ obtenue à la question 16.

Partie 2

- 21 Pour obtenir une moyenne, on calcule une intégrale.
- 22 L'effet de la modulation est de répliquer les spectres autour de la porteuse.
- 25 Étudier le comportement asymptotique du module de la transmittance.
- 33 Éteindre les générateurs et partir du dernier nœud A_n pour calculer les résistances équivalentes.
- 35 Erreur d'énoncé : il manque un facteur 2 au dénominateur. Exprimer i_n en fonction de i_0 puis utiliser la loi des nœuds à la borne moins de l'amplificateur opérationnel monté en additionneur.
- 43 Penser à la définition de la valeur efficace sous forme intégrale.
- 45 Pour calculer la largeur à mi-hauteur du filtre, utiliser le fait que l'amortissement est très faible ($m \ll 1$) pour considérer la bande passante relative Δx très faible devant 1 et ainsi effectuer des développements limités.

1. PRODUCTION DU SIGNAL

1 Supposons que la puissance P_0 émise par le laser se répartisse uniformément sur la section du faisceau. La densité surfacique de puissance de l'excitation vaut alors

$$\frac{P_0}{\sigma} = 5.10^6 \text{ W.m}^{-2}$$

La loi de Stefan-Boltzmann donne la valeur maximale de la densité surfacique de puissance P_S émise par un corps noir porté à la température T :

$$P_S = \sigma_{\text{St}} T^4 = 1,5.10^{-5} \text{ W.m}^{-2}$$

Il est **légitime de négliger l'émission thermique** devant la photoluminescence.

2 Soit F le nombre de photons frappant la face d'entrée de l'échantillon par unité de temps. Chacun de ces photons porte l'énergie $h\nu_0$. Le flux énergétique s'écrit alors

$$\vec{\Phi} = F h \nu_0 \vec{u}_x$$

3 L'identité de Poynting est un bilan local de puissance électromagnétique. Le terme

$$\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

est la densité volumique d'énergie électromagnétique dans le vide, milieu considéré ici, et s'exprime en J.m^{-3} . Notée U dans ce problème, elle vaut $N h \nu_0$. Sa dérivée est la densité volumique de puissance. Le vecteur de Poynting s'écrit, par définition,

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Il s'agit du vecteur densité surfacique de puissance sortante. Sa norme s'exprime en W.m^{-2} . Il est noté ici $\vec{\Phi}$ et a été exprimé à la question précédente. La divergence $\text{div } \vec{\Phi}$ a pour unité des W.m^{-3} et représente la densité volumique de puissance sortant d'un volume élémentaire. D'après la question précédente,

$$\text{div } \vec{\Phi} = \frac{\partial(F h \nu_0)}{\partial x}$$

En remplaçant les termes de l'identité de Poynting, on aboutit alors à

$$\frac{\partial(N h \nu_0)}{\partial t} + \frac{\partial(F h \nu_0)}{\partial x} = 0$$

et

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

| Cette relation traduit localement la conservation des charges.

4 Comparons l'énergie d'un photon incident à la largeur de bande interdite :

$$(h \nu_0)_{\text{eV}} = 2 \text{ eV} > E_g = 1,52 \text{ eV}$$

Les photons ont suffisamment d'énergie pour promouvoir un électron du niveau bas au niveau haut, ce qui permet la création d'une paire électron-trou.

5 Supposons le coefficient d'absorption β uniforme dans le matériau, ce que suggère l'énoncé en fixant sa valeur à 10^5 cm^{-1} . Par définition,

$$\beta = -\frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = -\frac{d \ln(F)}{dx}$$

d'où

$$F(x) = F(0^+) \exp(-\beta x)$$

Le flux de photons juste après l'entrée dans le matériau est précisément $F(0^+)$. Par définition du coefficient de réflexion, si $F_0 = F(0^-)$ représente le flux de photons juste avant réflexion,

$$F(0^+) = (1 - r)F_0$$

Comme la puissance incidente vaut $P_0 = F_0 h \nu_0 \sigma$,

$$F(x) = (1 - r)F_0 \exp(-\beta x)$$

Remplaçons F_0 par son expression :

$$F(x) = (1 - r) \frac{P_0}{h \nu_0 \sigma} \exp(-\beta x)$$

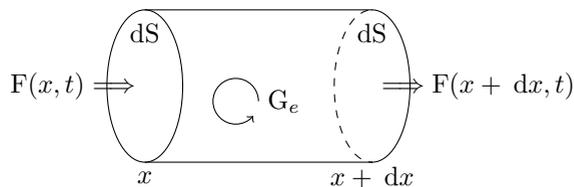
La grandeur $1/\beta$ est homogène à une longueur et **représente la profondeur caractéristique** de pénétration des photons dans le matériau.

6 D'après ce qui précède, $\frac{F(D)}{F(0^+)} = \exp(-\beta D) = 10^{-3}$

soit

$$D = \frac{3}{\beta} \ln 10 = 0,7 \mu\text{m}$$

7 Effectuons un bilan de photons dans un volume élémentaire sur un intervalle de temps dt . Les photons entrant en x peuvent soit sortir en $x + dx$, soit disparaître en créant une paire électron-trou. Le flux de photons est noté F . Le



taux de génération de paires électron-trou G_e correspond au nombre de photons absorbés par unité de volume et de temps. Dès lors, traduisons qu'une partie des photons qui entrent ressortent et que l'autre partie est absorbée :

$$F(x) dS dt = F(x + dx) dS dt + G_e dx dS dt$$

soit

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} dx dS dt + G_e dx dS dt$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial x} + G_e = 0$$

Or,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\beta F = -(1 - r)\beta F_0 \exp(-\beta x)$$

et par conséquent $G_e = \beta F_0 (1 - r) \exp(-\beta x) = G_0 \exp(-\beta x)$ (1)

Le facteur $1/h\nu_0$ présent dans l'expression (1) fournie par l'énoncé est en trop. Sa présence rend cette expression inhomogène.