

PSI
Physique · Modélisation · Chimie
2019

Sous la coordination de

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Stéphane RAVIER
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Lyon)

Par

Romain ANANKINE
professeur en CPGE

Nicolas COURRIER
professeur en CPGE

Julien DUMONT
professeur en CPGE

Émilie FRÉMONT
professeur en CPGE

Vincent FREULON
professeur en CPGE

Raphaël GALICHER
enseignant-chercheur à l'université

Margaux GALLAND
docteur en chimie

Robin GUICHARDAZ
professeur agrégé

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE

Charlie LEPRINCE
ENS Paris-Saclay

Étienne MARTEL
ENS Paris-Saclay

Sommaire

		Énoncé	Corrigé
CONCOURS COMMUN INP			
Physique et Chimie	Physique chimie et automobile. <i>mécanique des fluides, mécanique du point, électrocinétique, diagrammes E-pH, solutions aqueuses, oxydoréduction</i>	11	23
Modélisation et Ingénierie numérique	Optimisation de la masse d'un drone de prise de vue. <i>mécanique des fluides, mécanique, électrochimie, électrocinétique, induction</i>	43	66
CENTRALE-SUPÉLEC			
Physique et Chimie 1	Physique dans la salle de bain. <i>thermodynamique, diffusion thermique, électrocinétique, conversion de puissance</i>	83	94
Physique et Chimie 2	Seul sur Mars. <i>thermodynamique, mécanique du point, mécanique des fluides, cristallographie, cinétique chimique, diffusion de particules</i>	117	125

MINES-PONTS

Physique 1	Physique en Arctique. <i>magnétostatique, mécanique, diffusion thermique</i>	145	152
Physique 2	Physique des arbres. <i>mécanique des fluides, mécanique du point et du solide</i>	167	175
Chimie	Les batteries lithium-soufre. <i>cristallographie, oxydoréduction, thermodynamique</i>	191	199

POLYTECHNIQUE-ENS

Physique	Ressorts : conception, caractérisation, milieu de propagation. <i>mécanique, thermodynamique, physique des ondes, cristallographie, oxydoréduction</i>	209	220
Physique et Modélisation	Étude d'un véhicule sous-marin autonome : modélisation, identification et localisation. <i>dynamique des solides, modélisation des actions mécaniques, filtrage de signaux</i>	239	258

FORMULAIRES

Constantes chimiques	280
Constantes physiques	283
Formulaire d'analyse vectorielle	284
Classification périodique	288

Sommaire thématique de chimie

2015 – 2019

Centrale MP Physique et Chimie 1	•	•	•				•				
Centrale MP Physique et Chimie 2	••	•	•	•••	•	••	••				
Centrale PC Chimie	•	••	••	•••	•••	••	••	••	•••	••	•••
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•	•		•							
Centrale PSI Physique et Chimie 2	•	•	•	•••	••	•	••				
Mines MP Chimie	•••	••		•••	•••	••	•••				
Mines PC Chimie	•••	••	••	••	•••	•	••		•••		
Mines PSI Chimie	•••	••		••	•••	••	•••	•			
X/ENS PC Chimie		•	•••	••			•••	•	•••	•••	•
	Cristallographie	Solutions aqueuses	Cinétique chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-pH	Courbes courant-potentiel	Thermodynamique	Mélanges binaires	Chimie organique	Orbitales moléculaires	Chimie de coordination

SESSION 2019



PSIPC03

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

PHYSIQUE - CHIMIE

Mardi 30 avril : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de quatre parties, toutes indépendantes.

Des données se trouvent en fin de sujet, **page 12**.

PHYSIQUE CHIMIE ET AUTOMOBILE

Partie I - Aspects aérodynamiques

La **figure 1** montre l'allure des lignes de courant obtenues en soufflerie pour deux véhicules, l'un du type berline (semi-fastback) et l'autre correspondant à la version à hayon généralement dénommée break ou SW (hatchback). Les sections de référence et les coefficients aérodynamiques de ces deux véhicules sont un peu différents. L'écoulement de l'air est supposé incompressible.

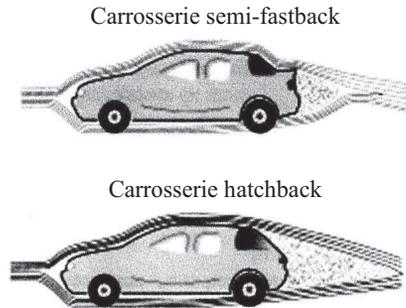


Figure 1 – Essais en soufflerie

On rappelle l'expression de la force de traînée : $F_x = \frac{C_x \rho_0 S V^2}{2}$, où $\rho_0 = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ est la masse volumique de l'air, V la vitesse relative de l'air par rapport à l'obstacle, C_x le coefficient aérodynamique de traînée de l'obstacle et S la section de référence de l'obstacle à l'écoulement.

Q1. Préciser les zones d'écoulement laminaire et turbulent. Quels sont les facteurs qui influencent le coefficient aérodynamique C_x .

On considère une automobile de masse $m = 1\,300 \text{ kg}$, de coefficient aérodynamique $C_x = 0,33$, de section de référence $S = 2,5 \text{ m}^2$ et dont le moteur développe une puissance $P = 62,5 \text{ kW}$.

Q2. En négligeant dans cette question les frottements entre les pneumatiques et la route et en supposant l'air environnant au repos dans le référentiel terrestre, exprimer la vitesse maximale de l'automobile en fonction de tout ou partie des données précitées, puis en donner une valeur numérique en km/h.

Q3. Sur route ou autoroute, à vitesse stabilisée, la consommation en carburant, exprimée en litres pour 100 km parcourus, augmente en V^x . Déterminer l'exposant x .

Pour améliorer la tenue de route, certaines voitures sportives sont équipées d'un aileron pour renforcer l'appui arrière (**figure 2**, page 3). On se propose ici de quantifier son influence.



Figure 2 – Aileron arrière

L'air est assimilé à un fluide parfait. Son écoulement, dans le référentiel de la voiture, est supposé stationnaire et incompressible. L'effet de la pesanteur sur l'air est négligé.

L'aileron, incliné vers le haut d'un angle non orienté $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par rapport à la route, dévie l'air qui s'écoule tangentielllement à la partie arrière du véhicule qui est inclinée vers le bas d'un angle, non orienté $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par rapport à la route.

On note S_e la section transverse de l'écoulement de l'air dévié par l'aileron. Cette section est supposée constante le long du tube de courant décrit sur la **figure 3**.

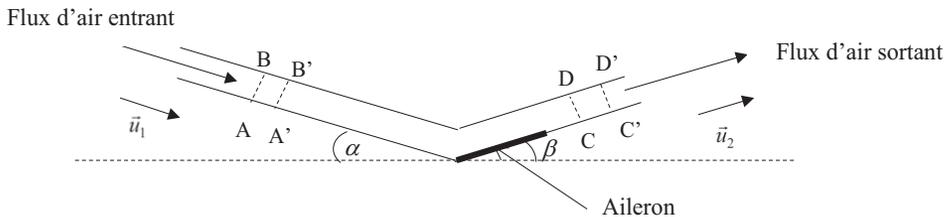


Figure 3 – Écoulement de l'air dans un tube de courant

On note respectivement $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_1$ et $\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_2$, les vitesses des écoulements d'air entrant et sortant du tube de courant. \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont des vecteurs unitaires.

On considère le système fermé, constitué par l'air compris entre les sections AB et CD à la date t et de l'air compris entre les sections A'B' et C'D' à la date $t + dt$.

Q4. On note dm_1 la masse qui traverse la section AB entre t et $t + dt$ et dm_2 la masse qui traverse la section CD entre t et $t + dt$. Comparer dm_1 et dm_2 ainsi que v_1 et v_2 .

CCINP Physique et Chimie PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Margaux Galland (docteur en chimie) et Étienne Martel (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Alexandre Herault (professeur en CPGE), Valentin Raban (professeur en CPGE), Augustin Long (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce problème est consacré au domaine de l'automobile et explore plusieurs parties du programme. Chaque partie est articulée autour d'un aspect de la conduite ou de la conception d'une voiture. Le sujet est composé de quatre parties indépendantes.

- La première partie s'ouvre avec quelques résultats de mécanique des fluides à établir. Puis on étudie l'influence d'un aileron arrière sur la tenue de route.
- La deuxième partie du sujet aborde le thème de l'alimentation électrique des véhicules à travers l'étude des propriétés du plomb et de l'accumulateur au plomb. Dans un premier temps, le diagramme E-pH du plomb est étudié ainsi que la stabilité du plomb dans l'eau. La solubilité du plomb dans l'acide sulfurique et l'examen de l'accumulateur au plomb sont ensuite abordés. Le fonctionnement en mode générateur et son optimisation sont étudiés à travers l'oxydoréduction.
- Dans une troisième partie, deux aspects liés à la sécurité routière sont examinés. On débute par une résolution de problème. Il s'agit d'étudier la distance de freinage d'un véhicule qui a eu un accident. Tout à fait dans l'esprit des programmes, ces questions proposent et développent une modélisation simple mais cohérente pour obtenir la valeur d'une grandeur importante dans ce genre de situation, la vitesse initiale du véhicule juste avant l'accident. Les contrôles d'alcoolémie sont abordés à travers l'étude d'un dosage oxydymétrique par la méthode de Cordebar. Cette partie invitait les candidats à prendre des initiatives sur la base d'une exploitation de résultats peu guidée.
- L'ultime partie de ce sujet étudie des aspects liés aux communications d'une automobile. Il y est question de modulation en amplitude puis en fréquence. La première sous-partie, plus simple que le reste, permet de répondre à plusieurs questions avec des connaissances directement tirées du cours et des séances de travaux pratiques effectuées pendant l'année. Le traitement de la modulation en fréquence, un peu plus technique, permet de bien comprendre comment un signal peut être modulé expérimentalement. Enfin, la dernière sous-partie propose deux questions assez simples sur le cours concernant les plasmas.

D'une longueur raisonnable, ce problème n'est pas de difficulté homogène. Certaines questions appellent des réponses très courtes et directement tirées du cours, tandis que d'autres requièrent des développements et des calculs plus approfondis. Notons également qu'il y a quelques applications numériques à faire sans calculatrice, ce qui n'est pas nécessairement difficile – à condition de s'être entraîné.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Utiliser un raisonnement énergétique.
- 4 Appliquer un bilan au système ouvert (compris entre les sections A'B' et CD) qui est en régime permanent.

Partie II

- 11 On étudie la solubilité dans l'acide sulfurique qui contient déjà des ions SO_4^{2-} . Que peut-on dire de la concentration de ces derniers ? Penser également à bien vérifier l'hypothèse à la fin.
- 13 Utiliser la loi de Nernst sur chaque électrode.
- 20 À chaque étape de ce titrage indirect et en retour, bien noter la quantité de matière et la concentration des différentes espèces. Lorsqu'une réaction a lieu, déterminer quelle espèce est limitante.

Partie III

- 17 Estimer la distance d'arrêt sur la photo puis appliquer un théorème énergétique pour relier cette distance à la vitesse initiale. Négliger les frottements de l'air.

Partie IV

- 23 Utiliser la formule de trigonométrie donnée et transformer tous les produits de cosinus en sommes, afin de pouvoir interpréter le résultat en termes de contributions spectrales.
- 28 Utiliser la figure 10, afin d'exprimer étape par étape les potentiels du montage en fonction des potentiels plus en amont du circuit. La formule trigonométrique donnée en fin d'énoncé permet enfin de conclure.
- 32 Le but de cette question est l'établissement d'ordre de grandeur, il faut donc estimer plutôt que connaître la taille d'une antenne d'un dispositif GPS.

PHYSIQUE CHIMIE ET AUTOMOBILE

I. ASPECTS AÉRODYNAMIQUES

1 Les zones d'écoulement laminaire sont caractérisées par des lignes de courant peu perturbées et régulières, ce qui correspond aux zones situées loin et autour de la voiture (hormis à l'arrière de celle-ci).

Un écoulement est turbulent si le mouvement des particules de fluide est très désordonné dans le temps et dans l'espace. La turbulence est localisée à l'arrière de la voiture.

Le coefficient aérodynamique, également appelé coefficient de traînée, dépend du rapport d'aspect de l'objet ainsi que du nombre de Reynolds Re défini par $Re = \rho V L / \eta$, avec ρ la masse volumique du fluide, η sa viscosité dynamique et V et L respectivement la vitesse et la dimension caractéristiques de l'écoulement.

À l'arrière de la carrosserie, les flux d'air laminaires ne suivent plus le profil du véhicule. Ceci est une illustration du phénomène de décollement de la couche limite qui induit de la turbulence dans cette zone qui est l'origine première de la traînée. Pour une sphère, on peut étudier les variations de C_x en fonction de Re . On constate alors autour de $Re \approx 3 \times 10^5$ une chute conséquente et rapide du coefficient aérodynamique appelée crise de traînée, phénomène qui fut étudié et expliqué par Prandtl en faisant intervenir la notion de transition de la couche limite d'un état laminaire à turbulent.

2 Étudions la voiture de masse m et de vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$ dans le référentiel \mathcal{R} supposé galiléen. Ce système, noté (S), est soumis à son poids, vertical, ainsi qu'à la réaction de la chaussée qui est normale au sol puisque les frottements entre les pneumatiques et la route sont négligés. Ces deux actions sont de fait normales au vecteur vitesse de la voiture et par conséquent, de ces deux forces, aucune ne développe de puissance. Il reste enfin à considérer les frottements avec l'air qui sont modélisées par la force de traînée donnée par l'énoncé selon

$$\vec{F}_x = -\frac{C_x \rho_0 S V^2}{2} \vec{e}_x$$

Appliquons le théorème de la puissance cinétique au système (S) dans le référentiel \mathcal{R}

$$\frac{dE_c}{dt} = P + \vec{F}_x \cdot \vec{v}$$

En considérant que la voiture se déplace à une vitesse v_{\max} constante, on obtient que l'énergie cinétique ne varie pas soit

$$P = \frac{C_x \rho_0 S}{2} V^2 v_{\max}$$

L'air environnant est supposé au repos, si bien que $V = v_{\max}$. Finalement,

$$P = \frac{C_x \rho_0 S}{2} v_{\max}^3$$

soit

$$v_{\max} = \left(\frac{2P}{C_x \rho_0 S} \right)^{1/3}$$

Numériquement,

$$v_{\max} = \left(\frac{2 \times 62,5 \times 10^3}{0,33 \times 1,2 \times 2,5} \right)^{1/3} = 50 \text{ m.s}^{-1} = 180 \text{ km.h}^{-1}$$

Cet ordre de grandeur paraît tout à fait cohérent. La valeur obtenue est une limite théorique maximale puisque les forces de frottements avec la route ont été négligées.

En accord avec l'énoncé, le calcul a été mené en négligeant tout frottement entre le sol et les pneumatiques. Pourtant, c'est bien ce mécanisme d'interaction entre les roues et la chaussée qui permet à la voiture d'avancer. En fait, dans ce modèle, ce sont les forces dissipatives dues aux effets de déformation des pneus au contact de la route qui sont négligées ; les frottements solides assurent en pratique une conversion parfaite entre la puissance mécanique sur l'arbre moteur et le mouvement de translation uniforme de la voiture.

3 La consommation, exprimée en litre pour 100 km, notée C , est proportionnelle à l'énergie E utilisée par le moteur qui est elle-même proportionnelle à la puissance P et au temps de parcours $\tau = L/V \propto 1/V$, donc

$$C \propto E \propto P \tau$$

Finalement on obtient, en remarquant que la puissance est proportionnelle à V^3 d'après la question précédente

$$C \propto V^2$$

donc

$$x = 2$$

4 La masse M (respectivement M') correspond à la masse de l'air compris entre les sections AB et CD (respectivement entre les sections $A'B'$ et $C'D'$). La conservation de la masse implique $M = M'$. Notons désormais

$$\begin{cases} M = dm_1 + M_{A'B'CD} \\ M' = M'_{A'B'CD} + dm_2 \end{cases}$$

Comme l'écoulement est stationnaire, $M_{A'B'CD} = M'_{A'B'CD}$. On en déduit

$$dm_1 = dm_2$$

L'écoulement étant incompressible, le débit volumique se conserve sur le tube de courant dont la surface de section est constante, ainsi

$$v_1 S_e = v_2 S_e$$

ou encore

$$v_1 = v_2$$

5 Notons Σ le système ouvert compris entre les sections $A'B'$ et CD . À l'instant t , la quantité de mouvement initiale, notée $\vec{p}(t)$ est donnée par

$$\vec{p}(t) = d\vec{p}_1 + \vec{p}_\Sigma(t)$$

avec $d\vec{p}_1$ la quantité de mouvement de la masse dm_1 et $\vec{p}_\Sigma(t)$ celle liée à la masse contenue dans Σ . À l'instant $t + dt$, on a de même, avec $d\vec{p}_2$ la quantité de mouvement associée à la masse dm_2 ,

$$\vec{p}(t + dt) = d\vec{p}_2 + \vec{p}_\Sigma(t + dt)$$

CCINP Modélisation et Ingénierie numérique

PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Dumont (professeur en CPGE) et Charlie Leprince (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Olivier Frantz (professeur agrégé en école d'ingénieurs), Tom Morel (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Les drones, utilisés notamment pour réaliser des prises de vue, sont de plus en plus évolués. Une des limitations à leur plus grande utilisation est l'autonomie en vol dont ils disposent. Ce sujet aborde différentes façons de réduire la masse pour améliorer ce critère.

- La première partie étudie le rapport entre la masse du drone et sa consommation énergétique. Après avoir discuté des hypothèses de travail, on développe un modèle permettant de relier la force de sustentation du drone et la puissance mécanique à lui fournir pour effectuer un vol stationnaire. Une étude expérimentale de cette loi est ensuite réalisée afin de valider le modèle. On se sert alors des résultats obtenus pour relier le temps de vol en autonomie à la masse du drone.
- La deuxième partie s'intéresse à une solution alternative à la nacelle motorisée : en utilisant des plots amortisseurs flexibles, on cherche à supprimer les vibrations pouvant nuire à la qualité du traitement numérique des informations provenant de la caméra. L'objectif de cette section est de déterminer s'il est effectivement possible d'isoler le tube de caméra en écartant suffisamment ses modes propres de ceux de la structure étoilée du drone.
- La troisième partie, la plus courte, comporte quelques questions d'électrochimie et s'intéresse à la manière dont on pourrait réduire la masse de la batterie. On calcule la capacité massique maximale d'un accumulateur lithium-polymère et on la compare à la capacité réelle d'une batterie de drone. Les pistes d'amélioration de ce paramètre essentiel ne sont qu'évoquées.
- Dans la dernière partie, le sujet étudie un système permettant d'alimenter le drone à distance à l'aide d'un couplage inductif. Dans un premier temps, on étudie une modélisation de la bobine sur un vaste domaine de fréquences, puis on s'intéresse au couplage à proprement parler en calculant la mutuelle inductance entre émetteur et récepteur. Enfin, on aborde la viabilité d'un tel système d'alimentation.

Le sujet, plutôt long, est de difficulté hétérogène. La première partie notamment demande de l'habileté pour obtenir les relations souhaitées. Originale, la deuxième partie demande un recul suffisant pour être correctement traitée car elle fait appel à des notions peu courantes. Comme dans la plupart des épreuves dites de « modélisation », on est souvent amené à discuter la pertinence du modèle utilisé, par exemple en le confrontant à des résultats expérimentaux.

INDICATIONS

Partie I

- 3 Commencer par exprimer P_m en fonction de F^2 , puis remarquer que $P_m/F = v_s/2$.
- 4 Appliquer le théorème du moment cinétique à l'équilibre.
- 5 Pour l'application numérique, penser à convertir α en radians.
- 7 Écrire l'équilibre des forces, sans oublier que le drone possède 4 hélices, puis utiliser l'expression de Π obtenue dans la question précédente.

Partie II

- 8 Utiliser la figure 8 pour déterminer les mouvements impossibles, en gardant à l'esprit que les plots sont alors considérés comme rigides.
- 9 La raideur du ressort est le rapport de la force maximale possible par la course maximale.
- 15 Bien étudier les dessins fournis dans les figures 16 et 17.
- 18 Injecter les formes proposées dans les trois équations différentielles citées juste avant la question.
- 20 Attention à la conversion d'unités pour passer des $\text{g}\cdot\text{mm}^2$ aux $\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Valider cette conversion avec la fréquence de roulis.

Partie III

- 26 Le vocabulaire utilisé par l'énoncé peut prêter à confusion : en réalité q_{\max} est bien une charge massique.
- 27 Remarquer que $11,1 \text{ V} = 3 \times 3,7 \text{ V}$.
- 28 Réécrire les demi-équations d'oxydation à l'anode, d'abord avec une anode faite d'un alliage d'insertion $\text{LiSi}_{0,22}$ puis avec une anode en lithium pur.

Partie IV

- 30 Écrire puis résoudre l'équation différentielle régissant le courant dans le circuit, en utilisant le fait que le courant qui circule dans une bobine est une fonction continue du temps.
- 33 Comparer R à $|jL\omega|$ puis déterminer le maximum de la fonction $|\underline{Z}(\omega)|$.
- 35 Pour calculer la mutuelle inductance, commencer par calculer le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ du champ magnétique créé par la bobine 1 au niveau de la bobine 2.
- 37 Écrire la loi des mailles dans les deux circuits. Attention aux bornes homologues.

OPTIMISATION DE LA MASSE D'UN DRONE DE PRISE DE VUE

I. QUEL RAPPORT ENTRE MASSE ET AUTONOMIE ?

1 En considérant que l'air loin de l'hélice est immobile (au repos à la pression atmosphérique) et qu'il est mis en mouvement par l'hélice, on peut affirmer qu'à l'entrée du tube de courant la vitesse de l'air est nulle.

Dans la mesure où l'hélice génère une importante convection de l'air, on peut négliger les forces de viscosité au sein du fluide et supposer l'**écoulement parfait**, ce qui permet de négliger la puissance des actions internes.

On cherche à savoir si la variation d'énergie potentielle est négligeable devant la variation d'énergie cinétique. En supposant que la vitesse de l'air et que le dénivelé varient peu entre l'hélice et la sortie du tube de courant, on s'intéresse à la variation d'énergie entre le haut du tube de courant et l'hélice. Déterminons dans un premier temps un ordre de grandeur de l'énergie cinétique. On considère que l'hélice a une vitesse de rotation de l'ordre de $\omega_h = 5\,000$ tours/min (soit $\omega_h = 5\,000 \times 2\pi/60 \approx 500$ rad.s⁻¹). En supposant que la vitesse de l'air en sortie de l'hélice est égale à celle de l'hélice (soit $v_h = \ell\omega_h$ où $\ell \approx 0,1$ m est la longueur d'une pale de l'hélice), alors la variation d'énergie cinétique massique entre l'entrée du tube de courant et l'hélice s'écrit : $\Delta e_c = v_h^2/2 - 0 \approx 1\,000$ J.kg⁻¹. D'autre part, on estime le dénivelé entre le haut du tube de courant et l'hélice à $\Delta z \approx 1$ m environ (estimation probablement un peu surestimée). On en déduit la variation d'énergie potentielle massique : $\Delta e_p = g\Delta z \approx 10$ J.kg⁻¹. On voit que même en la surévaluant, la variation d'énergie potentielle est négligeable devant la variation d'énergie cinétique.

2 Sous les hypothèses précédentes, l'équation (1) se réécrit, entre l'entrée et la sortie du tube de courant, sous la forme

$$D_m \left(\Delta e_c + \frac{\Delta p}{\rho} \right) = P_m$$

Comme la pression est la même à l'entrée et à la sortie et que la vitesse à l'entrée est nulle, cette équation devient

$$P_m = \frac{D_m v_s^2}{2}$$

La relation (2) donne quant à elle

$$F = D_m v_s$$

Avec $P_m = F v_h$,

$$F = \frac{P_m}{v_h} = \frac{D_m v_s^2}{2 v_h}$$

Identifions cette expression avec $F = D_m v_s$:

$$v_h = \frac{v_s}{2}$$

3 Commençons par calculer le débit massique :

$$D_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho v_h S$$

D'après la question 1,

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{D_m v_s^2}{2} \\ &= \frac{F^2}{2D_m} \\ &= \frac{F^2}{2\rho v_h S} \\ &= \frac{F^2}{\rho v_s S} \end{aligned}$$

Avec $\frac{P_m}{F} = \frac{v_s}{2}$,

$$P_m^2 = \frac{F^3}{2\rho S}$$

On obtient donc bien

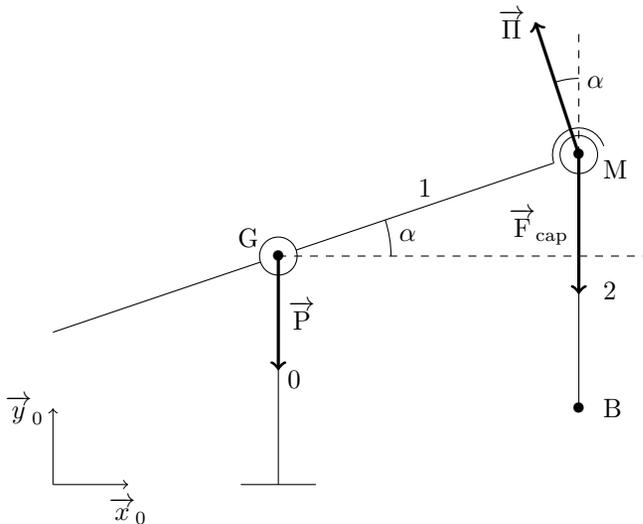
$$P_m = \frac{1}{\sqrt{2\rho S}} F^{3/2}$$

La force \vec{F} exercée par l'hélice sur l'air est $\vec{F} = F \vec{z}$, donc la force $\vec{\Pi}$ exercée par l'air sur l'hélice s'écrit

$$\vec{\Pi} = -\vec{F} = -\sqrt[3]{2\rho S P_m^2} \vec{z}$$

4 Les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur le drone et le cordon sont :

- la force exercée par le capteur sur le cordon : $\vec{F}_{\text{cap}} = -\vec{F}_c = -F_c \vec{y}_0$;
- la force de sustentation $\vec{\Pi} = \Pi \vec{y}_1$;
- le poids du drone \vec{P} ;
- la force exercée par le banc sur le drone \vec{N} .



Centrale Physique et Chimie 1 PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Robin Guichardaz (professeur agrégé) ; il a été relu par Raphaël Galicher (enseignant-chercheur à l'université) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur différents phénomènes physiques pouvant avoir lieu dans une salle de bain. Ses quatre parties sont indépendantes.

- Dans un premier temps, on s'intéresse au mélange d'eau froide et d'eau chaude qui a lieu dans un robinet. Le but de cette partie, qui ne présente pas de difficulté particulière, est d'obtenir l'expression de la température de l'eau en sortie du robinet en fonction des débits et des températures de l'eau froide et de l'eau chaude.
- La deuxième partie traite de l'eau vapeur présente dans l'air humide et du phénomène de condensation. On étudie un thermomètre permettant de mesurer l'humidité relative de l'air : le psychromètre. Cette partie contient quelques questions délicates et il convient à chaque fois de définir précisément les différents systèmes thermodynamiques étudiés.
- On s'intéresse dans la troisième partie à un dispositif chauffant servant à éviter la formation de buée sur un miroir de salle de bain. On quantifie notamment les échanges thermiques entre l'intérieur de la salle de bain et l'air extérieur afin de déterminer les caractéristiques du dispositif chauffant. Cette partie se termine par une résolution de problème qui mobilise les connaissances en conductivité électrique.
- Enfin, la quatrième partie est consacrée à l'étude de la recharge d'une brosse à dents électrique. Le support de la brosse est relié au secteur, et la tension délivrée par ce dernier est traitée successivement par deux circuits électriques : un redresseur pour convertir la tension alternative en tension continue, et un onduleur pour obtenir une tension alternative haute fréquence à partir du signal continu. Si les premières questions sont guidées, la dernière sous-partie traitant du couplage inductif fait appel au sens physique.

Ce sujet aborde ainsi des thématiques dans différents domaines, en thermodynamique, électricité et conversion de puissance. Tout à fait dans l'esprit des programmes, il propose cinq résolutions de problème.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Un verre d'eau standard possède un volume de 20 cL.
- 3 Les échanges thermiques peuvent s'effectuer selon trois modes : par conduction (sans transport de matière), par transfert conducto-convectif et par rayonnement.
- 4 Identifier l'eau contenue dans le mitigeur comme un système ouvert en régime permanent, et appliquer le premier principe de la thermodynamique.
- 5 Exprimer les enthalpies massiques de la question 4 en fonction des températures et utiliser le résultat de la question 2.
- 6 La température de sortie du robinet le soir permet de déterminer D_F/D_C .

Partie II

- 8 Écrire la loi des gaz parfaits pour l'air sec et l'eau vapeur.
- 10 L'eau vapeur produite au cours de la nuit contribue à la pression partielle de vapeur d'eau. Utiliser la loi des gaz parfaits le soir, puis le matin.
- 11 La quantité de matière d'eau vapeur est conservée au cours du réchauffement de la pièce, mais la pression de vapeur saturante est modifiée.
- 12 Analyser séparément l'air sec et l'eau vapeur.
- 13 La transformation subie par le système fermé est supposée adiabatique et à pression constante ; l'eau évaporée entre t et $t + dt$ change d'état.

Partie III

- 18 La résistance thermique de conduction est définie en faisant une analogie entre δT et la tension électrique d'une part, et entre P_{th} et le courant d'autre part.
- 21 Appliquer la relation du « diviseur de tension ».
- 23 La résistance thermique du miroir est en série avec celle du mur.
- 24 La situation est semblable à celle de la question 10. L'eau produite par la douche modifie l'humidité absolue de la pièce, ce qui augmente la température de rosée.
- 26 Écrire la condition sur \mathcal{P}_0 pour que $T_s = T_i$.
- 28 Déterminer le schéma électrique équivalent aux 38 bandes noires de résistance R du film antibuée. La puissance électrique fournie au film est entièrement convertie en puissance thermique par effet Joule.

Partie IV

- 34 Déterminer les caractéristiques du filtre afin d'atténuer la tension crête à crête de la première harmonique jusqu'à 5 % de l'amplitude de la composante continue.
- 37 Résoudre les équations différentielles sur chaque demi-période, puis utiliser la condition de continuité de l'intensité traversant la bobine et le fait que le signal i est périodique de période T_0 pour déterminer complètement $i(t)$. Remarquer que ce signal est croissant sur la première demi-période et décroissant sur la seconde.
- 39 Le paramètre L/r correspond au temps typique de charge de la bobine. Le comparer avec l'autre grandeur temporelle intervenant dans le problème.
- 41 La capacité d'une batterie en A.h correspond à l'intensité qu'elle est capable de délivrer pendant une heure.

PHYSIQUE DANS LA SALLE DE BAIN

I. ARRIVÉE D'EAU

1 Convertissons les débits massiques en débits volumiques afin de mieux appréhender les valeurs proposées. En notant D_v le débit massique et ρ_{eau} la masse volumique de l'eau, on a

$$D_v = \frac{D_s}{\rho_{\text{eau}}}$$

Sachant que $\rho_{\text{eau}} = 1 \text{ g.mL}^{-1}$, on peut convertir les quatre débits massiques en débits volumiques. On obtient

$$\text{a. } 2,0 \text{ mL.s}^{-1} \quad \text{b. } 2,0 \times 10^1 \text{ mL.s}^{-1} \quad \text{c. } 2,0 \times 10^2 \text{ mL.s}^{-1} \quad \text{d. } 2,0 \times 10^3 \text{ mL.s}^{-1}$$

Un verre d'eau standard possède un volume d'environ 200 mL. En considérant qu'un fonctionnement normal revient un remplir un tel verre en une seconde, on en déduit que le débit en sortie du mitigeur correspond à la proposition c.

$$D_s = 2,0 \times 10^2 \text{ g.s}^{-1}$$

2 Notons dm_C la masse d'eau chaude arrivant dans le mitigeur pendant un intervalle de temps dt . D'après la définition du débit massique, cette masse vérifie $dm_C = D_C dt$. De manière similaire, la masse d'eau froide arrivant dans le mitigeur durant le même intervalle de temps dt est $dm_F = D_F dt$, et la masse d'eau tiède sortant du robinet s'écrit $dm_s = D_s dt$. La masse d'eau est conservée, ce qui donne

$$dm_s = dm_F + dm_C$$

En exprimant les masses en fonction des débits, puis en simplifiant par dt , il vient

$$D_s = D_C + D_F$$

3 L'eau présente dans le corps du mélangeur peut a priori recevoir de la puissance thermique de la part de l'air environnant par trois mécanismes : conduction, échanges conducto-convectifs et rayonnement. Les échanges thermiques par conduction sont lents par rapport au temps que l'eau passe dans le mélangeur. Par ailleurs, l'eau n'est en contact direct avec l'air extérieur qu'à la sortie du mélangeur, ce qui signifie que les échanges conducto-convectifs n'entrent pas en jeu. Enfin, l'isolation métallique limite aussi les transferts par rayonnement.

4 L'eau contenue dans le mélangeur constitue un système ouvert en régime permanent : pendant un intervalle de temps dt , les masses élémentaires dm_C d'eau chaude et dm_F d'eau froide entrent dans le mélangeur et la masse dm_s en sort.

Étant donné que le mitigeur est horizontal, l'énergie potentielle de pesanteur des masses d'eau entrante et sortante est conservée. Par ailleurs, aux débits considérés les variations d'énergie cinétique associées à ces masses sont négligeables devant les autres grandeurs énergétiques du problème. Enfin, le mitigeur n'échange aucun travail avec l'extérieur, et ne reçoit aucune puissance thermique de la part de l'air environnant. Le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert appliqué à l'eau contenue dans le mélangeur s'écrit alors

$$dm_s h_s - (dm_C h_C + dm_F h_F) = 0$$

En exprimant comme pour la question précédente les masses en fonction des débits et en simplifiant par dt , on obtient

$$\boxed{D_s h_s = D_C h_C + D_F h_F}$$

Notons que ce sont bien les enthalpies (massiques) qui interviennent dans l'expression du premier principe de la thermodynamique pour des systèmes ouverts. L'utilisation de l'enthalpie à la place de l'énergie interne est liée à la prise en compte du travail des forces de pression lors de l'entrée et de la sortie des masses de fluide.

5 On note $h(T)$ l'enthalpie massique de l'eau liquide à la température T , qui s'écrit

$$h(T) = c_e(T - T_0) + h_0$$

où c_e est la capacité thermique massique de l'eau liquide, supposée indépendante de la température, T_0 est une température de référence et h_0 correspond à l'enthalpie massique à T_0 . On peut ainsi écrire le résultat de la question 4 sous la forme :

$$D_s (c_e (T_s - T_0) - h_0) = D_C (c_e (T_C - T_0) - h_0) + D_F (c_e (T_F - T_0) - h_0)$$

En utilisant le résultat de la question 2, on obtient

$$\boxed{T_s = \frac{D_C T_C + D_F T_F}{D_C + D_F}}$$

6 Afin de calculer la température de sortie de l'eau le matin, il faut déterminer les valeurs des débits d'eau chaude et d'eau froide fixés par la position du mitigeur. Écrivons le résultat obtenu à la question précédente sous la forme

$$T_s = \frac{T_C + \eta T_F}{1 + \eta} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{D_F}{D_C}$$

Notons $T_{\text{soir}} = 42^\circ\text{C}$ la température en sortie du mitigeur le soir, et T_{matin} la température en sortie du mitigeur le matin. En utilisant l'équation précédente on obtient

$$T_{\text{soir}}(1 + \eta) = T_C + \eta T_F$$

d'où

$$\eta = \frac{T_C - T_{\text{soir}}}{T_{\text{soir}} - T_F} = \frac{1}{3}$$

Le paramètre η , qui caractérise la position du mitigeur, est inchangé entre le soir et le matin. En revanche, la température de l'eau chaude le matin est plus élevée : $T_{C,\text{matin}} = 70^\circ\text{C}$. La température en sortie du robinet le matin est donc donnée par

$$\boxed{T_{\text{matin}} = \frac{T_{C,\text{matin}} + \eta T_F}{1 + \eta} = 57^\circ\text{C}}$$

Le risque de brûlure est présent mais relativement limité ; en effet, un enfant ouvrant le mitigeur le matin aura environ trois secondes pour réagir et retirer sa main du jet pour éviter une brûlure au troisième degré.

7 Lorsque la température augmente, la cire se dilate, ce qui signifie que la cartouche de cire occupe un volume plus important. L'élément qui régule les arrivées d'eau chaude et d'eau froide est alors poussé vers la gauche sur le schéma de la figure 2, diminuant ainsi le débit d'arrivée d'eau de l'entrée 1 (et augmentant dans le même temps le débit d'arrivée d'eau de l'entrée 2). Ainsi,

$$\boxed{\text{L'eau chaude arrive sur l'entrée 1.}}$$

Centrale Physique et Chimie 2 PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Raphaël Galicher (enseignant-chercheur à l'université) et Alexandre Herault (professeur en CPGE); il a été relu par Robin Guichardaz (professeur agrégé) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Le sujet étudie le réalisme de certaines scènes du film de science-fiction *The Martian* (*Seul sur Mars*) de Ridley Scott avec Matt Damon, sorti en 2015.

- La première partie, la plus courte, s'appuie sur un extrait d'un article publié dans le journal du CNRS. Il est question de déterminer quelques caractéristiques de la trajectoire de Mars autour du Soleil.
- Voulant s'assurer du réalisme, ou non, de la scène de tempête sur Mars pendant laquelle le véhicule d'exploration est renversé, la deuxième partie commence par une étude rapide de l'atmosphère martienne en s'intéressant particulièrement à l'état thermodynamiquement stable de l'eau. Vient ensuite l'étude proprement dite des conditions de cette « tempête », ainsi que des conditions mécaniques requises pour provoquer le basculement du Véhicule Ascensionnel Martien (VAM). Il est parfois nécessaire de prendre quelques initiatives, notamment pour interpréter correctement et complètement les informations présentes en annexe.
- La troisième partie, sans doute la plus simple, aborde succinctement l'efficacité d'une pompe à chaleur ditherme alimentée par des panneaux photovoltaïques.
- La quatrième partie s'intéresse au voyage spatial proprement dit. On s'appuie sur des orbites de transfert elliptiques, dites orbites de Hohmann. Les calculs envisagés, purement algébriques donc simples en apparence, nécessitent soin et rigueur pour utiliser à bon escient les différentes notations introduites et définir correctement les grandeurs à calculer. La partie se termine par deux résolutions de problème centrées sur la notion de poussée afin d'expliquer la scène de récupération de l'astronaute Mark Watney, lorsque ce dernier tente de rejoindre le véhicule spatial Hermès.
- La cinquième partie aborde la fabrication d'eau sur Mars. Les questions sont très classiques et c'est la thermodynamique chimique qui constitue l'essentiel de cette courte partie, notamment grandeurs standard de réaction, constante d'équilibre, déplacement d'équilibre et calcul de température de flamme.
- La dernière partie traite de la culture des pommes de terre sur Mars que Mark Watney fait pousser en utilisant des bactéries. On utilise dans cette partie la bactérie classique *E. coli* comme organisme modèle et on modélise le stress oxydant du sol de Mars par du peroxyde d'hydrogène H_2O_2 . Cette partie est l'occasion de traiter de diffusion de particules à travers la paroi des bactéries puis de cinétique pour étudier les variations des concentrations du peroxyde d'hydrogène à l'intérieur et à l'extérieur des bactéries.

Le sujet est très long et il aborde des thématiques variées sous l'angle original de la validation scientifique d'une œuvre cinématographique. De nombreuses données numériques sont fournies en annexe et certaines réponses aux questions s'y trouvent. Il est important dans ce type d'épreuve de se « laisser porter » par le sujet, tout en étant toujours dans la position de l'observateur critique qui peut souvent, par simple bon sens, progresser dans la compréhension des phénomènes.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Utiliser le temps de parcours des signaux radio quand la Terre et Mars sont au plus proche, puis au plus loin, l'une de l'autre.
- 2 Utiliser la troisième loi de Kepler.

Partie II

- 4 La pression dans le scaphandre n'est pas la pression à la surface de la Terre et le corps humain a besoin d'un volume d'oxygène donné à chaque inspiration.
- 7 Utiliser les valeurs affichées sur la figure 1 pour la température et la pression de l'atmosphère martienne.
- 8 Une des raisons est liée au taux d'oxygène et l'autre à la vaporisation de l'eau.
- 10 Utiliser le dernier graphe de l'annexe qui donne le coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds et même l'expression de la force de traînée.
- 11 Calculer les moments des forces par rapport au point fixe O.

Partie III

- 15 Estimer la surface des panneaux solaires visibles sur la figure 3.

Partie IV

- 17 Exprimer le temps de transfert en fonction de la période orbitale du vaisseau. Repérer Mars et la Terre par leurs positions angulaires car leur distance au Soleil est constante.
- 18 L'angle formé par TSM (Terre, Soleil, Mars) au début du nouveau lancement doit être le même que celui défini par T_0SM_0 .
- 19 Chercher les positions de la Terre et de Mars au début du nouveau transfert.
- 22 Exprimer la force de poussée en fonction de la masse d'air éjecté. En déduire le volume d'air à éjecter pour réduire la vitesse de 30 m.s^{-1} . Estimer le volume du vaisseau Hermès.
- 23 Utiliser la vitesse d'éjection de 500 m.s^{-1} donnée à la question 22. Pour calculer la densité de l'air dans le scaphandre, utiliser les résultats des questions 2 et 5. Trouver en combien de temps le scaphandre se vide de son air. Estimer alors le temps nécessaire pour que Mark Watney rejoigne le vaisseau en estimant la distance à parcourir. Utiliser les résultats de la question 8. Remarquer que la main de Mark Watney n'est pas confondue avec son centre de gravité.

Partie V

- 25 Penser à la stœchiométrie complète pour la formation d'eau à partir d'hydrazine.
- 27 Utiliser dans un premier temps la densité pour déterminer le paramètre de maille. La masse molaire de l'iridium a été oubliée dans l'énoncé : $192,2 \text{ g.mol}^{-1}$.
- 28 Calculer les grandeurs standard de réaction pour déterminer $\Delta_r G^\circ$, puis K° .
- 29 Utiliser la relation de Van't Hoff.
- 30 Faire l'hypothèse d'une transformation adiabatique pour le calcul de la température de flamme et se placer en conditions stœchiométriques.

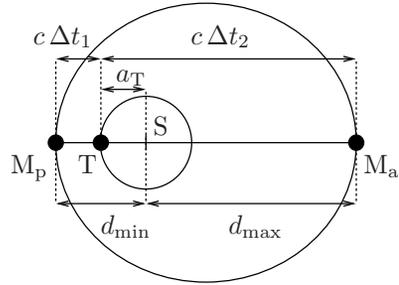
Partie VI

- 32 Faire apparaître j , la densité de courant particulaire. Le problème est de symétrie sphérique (une seule dimension r); établir une équation différentielle en r pour la concentration. L'intégrer entre $R - e$ et R .
- 34 Déterminer le rayon R en utilisant le volume de la bactérie.
- 35 Exprimer le flux de H_2O_2 sortant de la bactérie en faisant apparaître le volume de la bactérie et la concentration $[\text{H}_2\text{O}_2]_i$.
- 40 La dérivée de $[\text{H}_2\text{O}_2]_i$ par rapport au temps fait intervenir les quatre phénomènes décrits figure 8. Pour la variation de $[\text{H}_2\text{O}_2]_e$, relier la variation de la quantité de matière à la diffusion à travers toutes les cellules. Utiliser les volumes V_e et V_i .
- 41 À l'équilibre les concentrations intérieure et extérieure sont égales et stationnaires.
- 43 En situation de stress oxydant, $[\text{H}_2\text{O}_2] \gg K_M$, ce qui implique des vitesses michaeliennes maximales.
- 45 Si la durée de décomposition est trop longue, les bactéries ont peu de chance de survivre dans ce milieu très agressif.

SEUL SUR MARS

I. LA PLANÈTE MARS

1 On suppose que la trajectoire de la Terre T est circulaire. Celle de Mars est une ellipse de foyer le Soleil S. La distance minimale entre Mars et la Terre est celle entre le périhélie M_p de Mars et la position T de la Terre sur le schéma. La distance maximale est celle entre l'aphélie M_a de Mars et la position T.



D'après l'article du CNRS, les signaux radio qui se propagent à la vitesse de la lumière c mettent $\Delta t_1 = 5$ min pour aller de T à M_p et $\Delta t_2 = 22$ min pour aller de T à M_a . Les distances minimale et maximale entre la Terre et Mars sont $c\Delta t_1$ et $c\Delta t_2$. On en déduit les distances minimale (d_{\min}) et maximale (d_{\max}) entre Mars et le Soleil en fonction de la distance Terre-Soleil a_T

$$\begin{cases} d_{\min} = c\Delta t_1 + a_T = 240 \times 10^6 \text{ km} \\ d_{\max} = c\Delta t_2 - a_T = 246 \times 10^6 \text{ km} \end{cases}$$

D'après le schéma, on trouve que le demi-grand axe a_M est

$$a_M = \frac{d_{\min} + d_{\max}}{2} = 243 \times 10^6 \text{ km} \simeq 1,62 \text{ u.a.}$$

2 La Terre et Mars orbitent autour du Soleil de masse M_\odot . Leurs période \mathcal{P} et demi-grand axe a obéissent donc à la troisième loi de Kepler

$$\frac{a^3}{\mathcal{P}^2} = \frac{GM_\odot}{4\pi^2}$$

où $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$. On en déduit avec $\mathcal{P}_T = 365$ jours

$$a_M = a_T \left(\frac{\mathcal{P}_M}{\mathcal{P}_T} \right)^{2/3} = 229 \times 10^6 \text{ km} \simeq 1,52 \text{ u.a.}$$

Cette valeur diffère de $(1,62 - 1,52)/1,52 \simeq 7\%$ de la valeur estimée à partir des données de l'article. Or, cette estimation se base sur les temps de parcours donnés à la minute près, soit avec une précision de 30 s. Cela implique une précision relative sur a_M d'au moins $\simeq 0,5/5 = 10\%$. Les valeurs estimées de a_M sont donc en accord.

La troisième loi de Kepler permet également de calculer la masse du Soleil

$$M_\odot = \frac{4\pi^2 a_T^3}{G \mathcal{P}_T^2} \simeq 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$$

3 Considérons la répartition de masse de Mars homogène. Le champ de pesanteur g_M à la surface de Mars de masse M_M et de rayon $R_M = 3390$ km est donné par

$$g_M = \frac{GM_M}{R_M^2}.$$

En introduisant la masse volumique $\rho_M = 3900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, il vient

$$g_M = \frac{4\pi G \rho_M R_M}{3} \simeq 3,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ce champ est environ trois fois plus petit que sur Terre où il vaut $g_T \simeq 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Mines Physique 1 PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (professeur en CPGE); il a été relu par Arthur Alexandre (ENS Paris-Saclay) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet est l'association de plusieurs exercices dont le fil conducteur est l'étude de phénomènes physiques observables en arctique.

- La première partie débute par la description du champ magnétique terrestre. On exploite les informations qui peuvent être extraites qualitativement, puis quantitativement, de l'observation du mouvement de l'aiguille d'une boussole. Un modèle dipolaire est ensuite proposé pour modéliser ce champ. On cherche à calculer le moment magnétique de la Terre et à exprimer, en un point de sa surface, l'angle entre le vecteur champ magnétique et le méridien local. Puis on s'interroge sur le mouvement de particules chargées du vent solaire en présence du champ magnétique terrestre. Aux temps courts, il s'agit d'un mouvement cyclotron plan : les trajectoires des particules s'enroulent autour des lignes de champ du champ géomagnétique. Aux temps longs, ces boucles de courant dérivent le long des lignes de champ du champ magnétique terrestre. On montre alors que ce dernier tend à les expulser dans l'espace, jouant ainsi son rôle de bouclier magnétique.
- C'est l'étude du mouvement d'un traîneau tracté par un attelage sur la banquise qui ouvre la partie suivante. On s'intéresse plus particulièrement à l'effet du frottement solide entre la neige et le traîneau lors de sa mise en mouvement, pour gravir une faible pente, accélérer sur une surface horizontale ou encore négocier un virage. Cette partie se poursuit par l'étude de la croissance de l'épaisseur de la banquise. L'approche choisie est originale : on ramène l'étude à une association de résistances et d'une source de courant thermiques. L'équation différentielle donnant l'évolution de l'épaisseur de glace est obtenue en appliquant la loi des nœuds en terme de températures. Sa résolution fait appel à la méthode de séparation des variables.

De difficulté modérée, cet énoncé balaie de larges parties du programme. Il est proche du cours et peu calculatoire. Avec un minimum d'entraînement, les quelques applications numériques sont aisément réalisables sans calculatrice.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Invoquer le théorème scalaire du moment cinétique. Reconnaître une équation d'oscillateur harmonique dans la limite des petits angles. Relier la pulsation propre intervenant dans l'équation à la période des oscillations.
- 3 Utiliser le formulaire. Décomposer le vecteur \vec{e}_z sur les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ .
- 4 Que vaut θ (ou λ) à l'équateur ? à chaque pôle ? Exprimer la norme de \vec{B} aux pôles en fonction de celle à l'équateur.
- 5 Sur un schéma, placer un point sur chaque hémisphère, les vecteurs \vec{B} et \vec{e}_N en ces points. Les lignes de champ de \vec{B} sont orientées dans le même sens que \vec{M} . Relier \vec{e}_N et \vec{e}_θ , puis exprimer $\tan D$ à l'aide des projections de \vec{B} sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ .
- 7 Écrire l'énergie cinétique en fonction de r , q , B_0 et m . Exprimer \vec{M} en fonction de q , T (période d'oscillation de la particule chargée) et r . Exprimer alors T en fonction de B_0 , q et m . Prendre garde au signe « $-$ » dans \vec{B} .
- 9 Exprimer $\operatorname{div} \vec{B}$ en coordonnées cartésiennes.
- 10 Utiliser l'expression de \vec{B} établie à la question 3 en se plaçant en $\theta = 0$ (ou $\lambda = \pi/2$). Relier \vec{e}_r à \vec{e}_z et remplacer R_T par $R_T + z$.

Partie II

- 11 Considérer un élément de corde situé entre x et $x + 2dx$. Lister les actions mécaniques et appliquer le principe fondamental de la dynamique.
- 12 Projeter le théorème de la résultante dynamique sur l'axe dirigeant le mouvement et l'axe perpendiculaire au sol. Utiliser la loi de Coulomb pour le glissement et chercher à exprimer la réaction tangentielle sous la forme $\mu'_d Mg$.
- 13 Procéder de manière analogue à la question précédente. Cette fois, c'est la loi de Coulomb pour l'adhérence qui permet de répondre.
- 14 Le théorème de la résultante dynamique permet d'obtenir une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants, en v , qu'il faut intégrer. À l'instant t_1 , $v(t_1) = 0,95 v_0$. Remarquer que $5\% = 1/20$.
- 15 Pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète et s'exprime en fonction de la vitesse et du rayon du cercle. Exprimer $\tan \theta$ et exploiter la relation $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.
- 19 Attention, \mathcal{P}_u est une puissance surfacique.
- 20 Procéder en deux temps : commencer par établir le schéma équivalent en l'absence de changement d'état. Ajouter alors les source et dipôle permettant de modéliser ce changement d'état. L'expression de Φ s'obtient en raisonnant sur une masse élémentaire d'eau qui change d'état durant dt et libère l'enthalpie de changement d'état associée.
- 21 Un montage suiveur devrait convenir.
- 22 Utiliser la loi des nœuds en terme de températures (prendre garde aux signes). Éliminer un des termes pour traduire la différence d'ordre de grandeur. La méthode de séparation des variables permet de démontrer la relation entre z_g et t .
- 23 Approximer la relation obtenue à la question précédente pour $z_g \gg \ell_g$ et $z_g \ll \ell_g$.

PHYSIQUE EN ARCTIQUE

I. PÔLES GÉOGRAPHIQUES ET MAGNÉTIQUES

1 Assimilons l'aiguille aimantée à un dipôle magnétique de moment \vec{m} . D'après le formulaire, son énergie potentielle dans le champ magnétique terrestre \vec{B} est

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Ainsi, l'aiguille aimantée tend à s'aligner dans le même sens que les lignes de champ du champ \vec{B} terrestre, ce qui **minimise l'énergie potentielle** de la boussole. Comme les lignes de champ du champ magnétique terrestre \vec{B} sont orientées du pôle Sud géographique vers le pôle Nord géographique, **à l'équilibre, le moment magnétique de la boussole s'oriente selon la direction Nord-Sud perpendiculairement à l'axe (Δ) en pointant vers le Nord géographique**. Cette position est une position d'équilibre **stable** puisqu'elle correspond à un **minimum d'énergie potentielle**.

On peut aussi justifier la stabilité en remarquant que si on écarte l'aiguille de sa position d'équilibre, le couple magnétique l'y ramène, ce qui caractérise une position d'équilibre stable.

2 Appliquons le théorème scalaire du moment cinétique à l'aiguille de la boussole en rotation autour de l'axe (Δ) orienté par le vecteur \vec{e}_r , dans le référentiel du sol, supposé galiléen :

$$I\ddot{\alpha} = (\vec{m} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_r$$

avec $\alpha = \widehat{(\vec{B}_N; \vec{m})}$ où \vec{B}_N est la composante de \vec{B} normale à l'axe (Δ). Il vient

$$I\ddot{\alpha} = -mB_N \sin \alpha$$

soit encore
$$\ddot{\alpha} + \frac{mB_N}{I} \sin \alpha = 0$$

À la limite des petits angles, $\sin \alpha \simeq \alpha$ et l'équation précédente conduit à une équation d'oscillateur harmonique dont la période τ_{osc} vérifie

$$\frac{mB_N}{I} = \left(\frac{2\pi}{\tau_{\text{osc}}} \right)^2$$

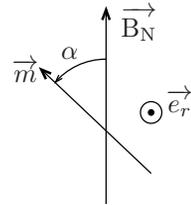
d'où

$$B_N = \frac{4\pi^2 I}{m \tau_{\text{osc}}^2}$$

La connaissance de I , m et τ_{osc} permet de **déterminer la composante du champ magnétique normale à l'axe (Δ)** de rotation de l'aiguille.

L'énoncé désigne τ_{osc} comme la « pseudo-période » et indique que le frottement au niveau de la liaison pivot est « faible ». Cela peut suggérer de prendre en compte le moment de la liaison sous la forme $-h\dot{\alpha}$ (frottement visqueux). Dans ce cas, l'équation différentielle des petites oscillations s'écrit

$$\ddot{\alpha} + \frac{h}{I}\dot{\alpha} + \frac{mB_N}{I}\alpha = 0$$



En régime faiblement amorti, les solutions sont de la forme

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-ht/(2I)} \cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\frac{mB_N}{I} - \left(\frac{h}{2I}\right)^2}$$

Pour un amortissement suffisamment faible ($h \ll mB_N$),

$$\frac{2\pi}{\tau_{\text{osc}}} = \Omega \simeq \sqrt{\frac{mB_N}{I}}$$

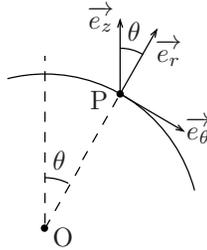
et on retrouve la même expression de τ_{osc} que dans le modèle sans frottement.

3 D'après le formulaire, le champ géomagnétique au sol s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 R_T \vec{e}_r (M_0 \vec{e}_z \cdot R_T \vec{e}_r) - R_T^2 M_0 \vec{e}_z}{R_T^5} \\ &= \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \left[3 \vec{e}_r (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) - \vec{e}_z \right] \end{aligned}$$

D'après la figure 5,

$$\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$$



Injectons cette décomposition de \vec{e}_z dans l'expression de \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \left[2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta \right]$$

4 À l'équateur, $\theta = \pi/2$ et $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_z$, d'où

$$\vec{B}_E = -\frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_z$$

Puisque \vec{B}_E est orienté du pôle Sud géographique vers le pôle Nord géographique, \vec{B}_E et \vec{e}_z sont de même sens. Cela impose

$$M_0 < 0$$

Ce résultat traduit que le pôle Nord géographique correspond au pôle Sud géomagnétique. On devait s'attendre à ce résultat, car l'aiguille de la boussole présente spontanément son pôle Nord magnétique au pôle Sud géomagnétique, qui est donc situé au pôle Nord géographique.

D'après l'expression de \vec{B}_E ,

$$M_0 = -\frac{4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0} = -\frac{(6.10^6)^3 \times 3.10^{-5}}{10^{-7}} = -8.10^{22} \text{ A.m}^2$$

Mines Physique 2 PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Romain Anankine (professeur en CPGE) ; il a été relu par Amélie Gay (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur différents aspects de la physique des arbres.

- La première partie aborde l'influence du stress hydrique sur le transport de la sève dans les canaux d'une branche d'arbre. On commence par s'intéresser à la pression nécessaire pour que la sève puisse monter jusqu'à la cime des arbres, soit à plusieurs dizaines de mètres pour les plus grands spécimens. On conclut qu'il est nécessaire d'envisager des pressions négatives pour expliquer cette montée. Une difficulté supplémentaire se pose en cas de fortes chaleurs par exemple : le manque d'eau peut être à l'origine d'un stress hydrique dont une conséquence, fâcheuse pour l'arbre, est l'apparition de bulles de gaz dans la sève. Après avoir étudié la stabilité d'une situation avec bulle, la suite de cette partie vise à expliquer le fonctionnement d'un dispositif mis au point à l'Institut national de recherche agronomique (Inra), le cavitron, qui permet de faire des mesures quantitatives en laboratoire de la conductance hydraulique d'une branche. Pour cela, on commence par l'étude de l'écoulement dans une conduite régulière, qui modélise les vaisseaux que l'on trouve dans le tissu xylémique d'un arbre, afin d'introduire la notion de conductance hydraulique. Il s'agit simplement d'étudier un écoulement de Poiseuille, d'abord en référentiel galiléen, puis en référentiel tournant. Même si les principaux éléments sont rappelés, le fait que la mécanique en référentiel non galiléen ne soit pas au programme de PSI peut déstabiliser. Cela ne concerne toutefois que quelques questions. Cette partie traite essentiellement de mécanique des fluides.
- La seconde partie traite de la dynamique de la chute d'un arbre. On s'intéresse à deux cas « extrêmes » pour le modèle retenu : une situation où l'arbre est comme posé sur le sol, situation appelée « arbre mort » mais qui peut tout aussi bien désigner un arbre bien vivant, mais coupé à sa base par un bûcheron. C'est en effet ce dernier qui est à la manœuvre pour faire basculer l'arbre. Dans la deuxième situation, on tente de quantifier la vitesse du vent nécessaire pour faire osciller voire arracher un arbre, retenu au sol grâce à ses racines. Cette partie utilise davantage le programme de première année avec notamment la mécanique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe et les lois de Coulomb.

Ce sujet, de difficulté raisonnable, constitue une bonne révision des chapitres abordés, sur un thème original.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Utiliser la loi de la statique des fluides pour un fluide incompressible. Prendre garde à l'orientation de l'axe vertical.
- 2 Effectuer un bilan des forces sur le piston sans masse.
- 3 Écrire le travail élémentaire sous la forme $\delta W_p = -dE_p$.
- 5 Penser à l'énergie thermique apportée par le milieu ambiant.
- 6 Utiliser l'équation de conservation de la masse.
- 7 Effectuer un bilan des forces sans oublier les forces de pression s'exerçant sur les surfaces en x et en $x + dx$. Remarquer que l'équation demandée est équivalente à une égalité $F(x) = G(r)$ avec x et r deux variables indépendantes.
- 8 Intégrer l'équation trouvée à la question 7.
- 11 $\vec{f}_{i,1}$ est appelée communément « force centrifuge ».
- 12 Reprendre le bilan des forces effectué à la question 7 et ajouter les forces d'inertie.
- 13 Utiliser la continuité de la pression en $x = 0$.
- 14 Faire un bilan de forces analogue à la question 12 dans chacun des réservoirs, en supposant l'équilibre relatif du fluide.

Partie II

- 16 Appliquer le théorème du centre d'inertie au bûcheron à l'équilibre et introduire la loi de Coulomb dans le cas d'une absence de glissement.
- 17 Appliquer le théorème du centre d'inertie sur l'arbre à l'équilibre.
- 18 Se servir du bras de levier pour calculer le moment du poids.
- 19 L'arbre est à l'équilibre si le moment du poids est compensé par le moment exercé par le bûcheron.
- 21 Dans l'expression du moment Γ_B , remplacer F par F_{\max} déterminée à la question 16. Chercher l'angle α qui minimise $\phi(\alpha)$.
- 22 Se rappeler que le moment Γ_B doit dépasser une valeur minimale, établie à la question 19, pour mettre l'arbre en rotation.
- 23 Sur le schéma, bien représenter l'angle que fait OG avec la verticale et repérer la relation géométrique qu'il a avec θ .
- 26 Lorsque l'arbre est penché, le moment des actions du vent est modifié : le bras de levier varie et la surface apparente de l'arbre qui fait face au vent également.
- 28 Un équilibre existe si $|\Gamma_r| = \Gamma_v$. Étudier le comportement de l'arbre si l'angle θ augmente : l'écart à la position d'équilibre est-il amplifié ou au contraire amorti par le couple résistant $|\Gamma_r|$?
- 29 Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe. Le vent peut déraciner l'arbre si la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ne peut s'annuler.
- 30 Déterminer les racines du polynôme $P(u)$ qui permettent d'avoir $\dot{\theta} = 0$.

PHYSIQUE DES ARBRES

I. PHYSIQUE DU CAVITRON

1 La relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit, avec l'axe (Oz) vertical ascendant (voir la figure ci-dessous) :

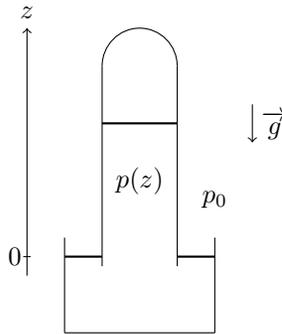
$$\frac{dp}{dz} = -\rho_e g$$

L'eau étant supposée incompressible, la masse volumique ρ_e est constante, ce qui permet d'intégrer la relation précédente entre la cote $z = 0$ où $p(0) = p_0$ et une cote quelconque z , ce qui donne

$$p(z) = p_0 - \rho_e g z$$

La pression dans le fluide devient négative si la hauteur d'eau est supérieure à

$$z_m = \frac{p_0}{\rho_e g} = 10 \text{ m}$$



Pour des arbres de hauteur supérieure à 10 m, la pression de l'eau est négative et inférieure à la pression de vapeur saturante de l'eau. Cela conduit soit à la formation de bulles de vapeur, soit au maintien de l'eau liquide dans un état métastable.

Il est essentiel de préciser que l'axe (Oz) est vertical ascendant, sans quoi le signe la relation fondamentale de la statique des fluides change.

2 Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, lié à l'axe (O, \vec{u}_z), le piston de section S est sans masse donc $m \vec{a} = \vec{0}$. Il est soumis à la force pressante de l'eau $p S \vec{u}_z$ et à la force exercée par l'opérateur $F \vec{u}_z$. On ignore la force pressante due à l'atmosphère et l'effet de la pesanteur sur le champ de pression dans l'eau est négligé. Ainsi, en projetant le théorème du centre d'inertie sur l'axe (O, \vec{u}_z), on obtient

$$p = -\frac{F}{S} < 0$$

La pression de l'eau est négative et la nucléation de bulles de vapeur est possible.

3 La bulle (de volume V et de rayon r) reçoit un travail $\delta W_p = -p dV$ qui fait passer son rayon de r à $r + dr$. La bulle étant sphérique, son volume a pour expression $V = 4\pi r^3/3$ et varie de façon infinitésimale de $dV = 4\pi r^2 dr$. Ainsi, le travail élémentaire reçu vaut

$$\delta W_p = -4\pi r^2 p dr$$

La force F étant constante, p l'est aussi et on peut exprimer le travail comme

$$\delta W_p = -d \left(\frac{4}{3} \pi r^3 p + C^{te} \right)$$

Ce travail peut s'écrire sous la forme $\delta W_p = -dE'_p$, où E'_p est l'énergie potentielle associée aux forces pressantes

$$E'_p = \frac{4}{3} \pi r^3 p$$

L'énergie potentielle étant définie à une constante additive près, sans signification physique, on peut poser $E'_p(0) = C^{te} = 0$.

4 À l'énergie potentielle issue des forces de pression E'_p , on ajoute l'énergie potentielle de tension superficielle $E''_p = \gamma_e \Sigma$, avec $\Sigma = 4\pi r^2$ l'aire de la surface de la bulle. Par conséquent, l'énergie potentielle totale du système est un polynôme de degré 3

$$E_p = \frac{4}{3} \pi p r^3 + 4\pi \gamma_e r^2$$

| Ici $p < 0$ (question 2), donc le coefficient du monôme de degré 3 est négatif.

E_p admet des extrema aux valeurs de rayon r^* pour lesquelles

$$\left(\frac{dE_p}{dr} \right)_{r^*} = 0 = 4\pi r^* (p r^* + 2\gamma_e)$$

$$\text{soit} \quad r^* = 0 \quad \text{ou} \quad r^* = r_c = -\frac{2\gamma_e}{p}$$

La valeur $r = 0$ correspond à un minimum local nul de l'énergie potentielle tandis que E_p admet un maximum en $r = r_c$ pour lequel

$$E_a = E_p(r_c) = \frac{16\pi\gamma_e^3}{3p^2}$$

Numériquement, avec $p = -2,0$ Mpa,

$$r_c = 70 \text{ nm} \quad \text{et} \quad E_a = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

On exprime $\varepsilon(x) = E_p(x)/E_a$ en fonction de $x = r/r_c$

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \frac{4}{3} \frac{\pi p}{16\pi\gamma_e^3/3p^2} r^3 + \frac{4\pi\gamma_e}{16\pi\gamma_e^3/3p^2} r^2 \\ &= -2 \frac{r^3}{(-2\gamma_e/p)^3} + 3 \frac{r^2}{(-2\gamma_e/p)^2} \end{aligned}$$

$$\varepsilon(x) = x^2(3 - 2x)$$

Sa dérivée

$$\varepsilon'(x) = 6x(1 - x)$$

s'annule en $x = 0$ et en $x = 1$. Pour $x \ll 1$, $\varepsilon(x)$ est équivalent au monôme de plus bas degré: $\varepsilon(x) \sim 3x^2$. Pour $x \gg 1$, $\varepsilon(x)$ est, au contraire équivalent au monôme de plus haut degré: $\varepsilon(x) \sim -2x^3$. De plus, $\varepsilon(0) = \varepsilon(1,5) = 0$ et $\varepsilon(2) = -4$. Ainsi, $\varepsilon(x)$ possède un minimum local en $x = 0$, un maximum global en $x = 1$ et tend vers $-\infty$ pour x qui tend vers $+\infty$, comme le montre le graphique suivant.

Mines Chimie PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Margaux Galland (docteur en chimie) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet traite des batteries lithium-soufre qui font l'objet de développements depuis quelques années en raison d'une densité d'énergie théorique plus élevée que les traditionnelles batteries lithium-ion et d'un coût de production plus faible.

On commence par deux questions classiques sur les structures électronique et cristallographique du soufre. On conduit ensuite une étude de la décharge puis de la charge de la batterie.

Malheureusement, seule une petite moitié de l'épreuve correspond à ce que l'on peut attendre d'un candidat de la filière PSI. L'étude globale est bien trop ambitieuse et peu en rapport avec la chimie étudiée en classes préparatoires, particulièrement dans cette filière. Le thème est certes intéressant mais si vous cherchez une épreuve d'entraînement, passez votre chemin ou contentez-vous de travailler sur les cinq, voire les dix, premières questions. Pas la peine d'aller plus loin en vue de progresser pour les concours.

INDICATIONS

- 1 L'anion le plus stable qui se forme correspond à la configuration électronique d'un gaz noble.
- 2 Il y a 16 unités S_k par maille.
- 3 Ne pas oublier que l'on forme le précipité, pas uniquement les ions. Relier la tension standard à $\Delta_r G^\circ$.
- 4 Raisonner en gramme de soufre et non pas en gramme de matériau de cathode. Deux moles d'électrons circulent par mole de soufre.
- 5 Calculer les volumes initial et final pour une mole de soufre en utilisant les masses volumiques.
- 6 Combien d'électrons sont échangés par atome de soufre sur toute la décharge ?
- 7 0,5 électrons sont échangés par atome de soufre pour le plateau 1, soit une charge totale de 4- pour les 8 atomes.
- 8 On peut utiliser la loi de Beer-Lambert. Ne pas oublier de réaliser une droite d'étalonnage.
- 10 La forme de la courbe traduit une formation puis une consommation de l'espèce. Relier cette évolution aux deux plateaux.
- 12 La dérivé de $[S_8]$ fait apparaître un terme de formation (plateau 1 dans le sens de la charge) et un terme de consommation d'ordre 1 sur le lithium.
- 13 Comparer la limite de l'expression obtenue en fonction de la concentration totale dans le cas où $f < 1$.
- 15 Il faut relier les valeurs r_1 et r_2 données à des distances entre atomes dans le tétraèdre. Il est pratique de déterminer le rapport entre le coté du tétraèdre (r_2) et la distance entre un sommet et le centre (r_1).
- 16 Exprimer le rapport entre les quantités de P et de S en fonction de x et déterminer les formules brutes correspondant aux trois situations envisagées, sachant qu'à chaque nouvelle connexion un atome de soufre appartient à deux tétraèdres.
- 20 Écrire l'équation de réaction entre l'électrolyte et le lithium, puis déterminer le signe de $\Delta_r G^\circ$ pour conclure sur la stabilité. N'ayant pas les entropies molaires, on se limite à la contribution enthalpique.

LES BATTERIES LITHIUM-SOUFRE

1 D'après les règles de Klechkowski, Hund et Pauli, la configuration électronique du soufre à l'état fondamental est

$$\boxed{\text{S}(Z = 16) : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4}$$

Le soufre peut former l'anion S^{2-} en gagnant deux électrons pour arriver à une configuration isoélectronique du gaz noble qui le suit (l'argon) dans laquelle toutes les sous-couches sont totalement remplies.

2 Le volume d'une maille orthorhombique est $V = abc$. La masse volumique s'écrit

$$\rho = \frac{16 k \mathcal{M}_S}{\mathcal{N}_A abc}$$

soit

$$k = \frac{\rho \mathcal{N}_A abc}{16 \mathcal{M}_S}$$

Numériquement,
$$k = \frac{2,1 \cdot 10^6 \times 6 \cdot 10^{23} \times 1,3 \times 2,4 \times 10^{-27}}{16 \times 32}$$

soit, de manière approchée,

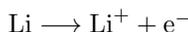
$$k \approx \frac{2 \times 6 \times 3}{16 \times 32} \cdot 10^2 \approx \frac{9}{8} \times \frac{100}{16}$$

d'où

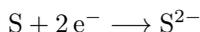
$$\boxed{k = 7}$$

Il faut être efficace sur les applications numériques sans calculatrice et ne pas avoir peur de faire des approximations. Ici, on ne garde que des valeurs entières et, pour le calcul final, il est clair que $9/8$ est légèrement plus grand que 1 et que $100/16$ est légèrement plus grand que 6, ce qui donne le résultat entier final. Il est possible de trouver une autre valeur selon la façon d'approximer et de simplifier le calcul sans calculatrice. Par exemple, trouver 6 ou 8 ne poserait pas du tout de souci (le calcul précis à la calculatrice donne 7,7) mais il convient de rester cohérent et de proposer au final une valeur entière.

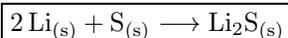
3 L'anode en lithium est oxydée selon la demi-équation électronique



alors que la cathode en soufre est réduite selon



Les ions lithium et sulfure précipitent et l'équation de la réaction de décharge s'écrit



La tension standard e° de la batterie est telle que

$$\Delta_r G^\circ = -2 \mathcal{F} e^\circ$$

car la réaction fait intervenir l'échange de deux électrons. Par ailleurs, on a

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$$

D'après la loi de Hess,

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{Li}_2\text{S}) - 2 \Delta_f H^\circ(\text{Li}) - \Delta_f H^\circ(\text{S}) = -441 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Par définition, $\Delta_r S^\circ = S_m^\circ(\text{Li}_2\text{S}) - 2 S_m^\circ(\text{Li}) - S_m^\circ(\text{S})$

Numériquement, $\Delta_r S^\circ = 63 - 2 \times 29,1 - 32,1 \approx -27 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

À 298 K, il vient donc

$$\Delta_r G^\circ = -441.10^3 + 298 \times 27 \approx -441.10^3 + 300 \times 30 = -432 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

Par suite,
$$e^\circ = -\frac{\Delta_r G^\circ}{2\mathcal{F}} \approx \frac{432.10^3}{2.10^5}$$

Numériquement,
$$e^\circ \approx 2,2 \text{ V}$$

La tension standard des batteries lithium-soufre est assez nettement **inférieure** à la tension nominale des batteries lithium-ion.

4 N'ayant pas d'information sur la quantité de carbone conducteur présent dans la cathode, on conduit le calcul en raisonnant sur le soufre. On n'obtient donc pas un résultat par gramme de matériau de cathode comme le suggère l'énoncé mais par gramme de soufre dans le matériau de cathode.

D'après la stœchiométrie de la réaction de décharge, il circule 2 moles d'électrons par mole de soufre, si bien que

$$Q = n_{\text{elec}} \mathcal{F} = 2 n_S \mathcal{F}$$

soit, pour 1 g de soufre,
$$Q_m = \frac{2}{M_S} \mathcal{F}$$

Numériquement,
$$Q_m = \frac{2}{32} \cdot 10^5 \approx 6.10^3 \text{ C.g}^{-1}$$

1 C = 1 A.s donc 1 A.h = 3 600 C, ce qui donne finalement pour la capacité spécifique de la cathode (par gramme de soufre)

$$Q_m = \frac{6.10^3}{3600} \approx 1,7 \text{ A.h.g}^{-1}$$

Le matériau de cathode est ici **beaucoup plus efficace** que les matériaux typiques de cathode de batteries lithium-ion.

Il convient de nuancer ce résultat car la valeur numérique est par gramme de soufre dans la cathode et non pas par gramme de cathode (qui contient en plus du carbone)... La différence pourrait être beaucoup plus faible en tenant compte de la fraction massique du soufre dans le matériau. Cependant l'écart important avec les 300 mA.h.g⁻¹ laisse tout de même de la marge. Il faudrait que la fraction massique du soufre dispersé dans le carbone soit inférieure à 1/6^e pour retrouver une valeur de cet ordre de grandeur.

5 L'état totalement chargé correspond à 2 Li + S, l'état totalement déchargé à Li₂S, tout à l'état solide. Pour une mole de soufre, le volume initial est alors

$$V_i = 2 V(\text{Li}) + V(\text{S}) = 2 \frac{M_{\text{Li}}}{\rho(\text{Li})} + \frac{M_{\text{S}}}{\rho(\text{S})}$$

Numériquement,
$$V_i = 2 \times \frac{7}{0,53} + \frac{32}{2,1} \approx 28 + 16 = 44 \text{ cm}^3$$

X/ENS Physique PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Émilie Frémont (professeur en CPGE) ; il a été relu par Thomas Dupic (ENS Ulm) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet est consacré à l'étude de problématiques physico-chimiques intervenant dans la conception et l'utilisation de ressorts. Il est constitué de deux parties indépendantes, elles-mêmes scindées en sous-parties peu liées.

- Dans la première partie, la conception et la fabrication des ressorts sont au cœur du questionnement. L'objectif est tout d'abord de relier les propriétés mécaniques d'un ressort à ses dimensions géométriques. Puis on s'intéresse à plusieurs aspects des traitements thermique et électrochimique appliqués à ces pièces lors de leur fabrication.
- La seconde partie traite de la propagation d'ondes mécaniques au sein d'un ressort. La première sous-partie suit un cheminement classique en physique des ondes : établissement de l'équation de propagation puis étude de la dispersion et de l'atténuation dans le milieu. La suite, plus originale, est consacrée à l'étude de deux situations concrètes dans lesquelles ces ondes interviennent.

Ce problème de longueur raisonnable est de difficulté relativement modeste pour le concours X/ENS. Son énoncé bien construit et progressif en fait un excellent problème de révisions pour tous les étudiants de deuxième année, quels que soient leurs objectifs aux concours.

Quelques maladresses, notamment dans le choix des notations, sont à déplorer, sans que cela nuise à la compréhension des attentes du sujet. Les questions d'applications numériques, à réaliser sans calculatrice, constituent un bon entraînement en vue des épreuves écrites et orales.

Enfin, rappelons que plus une épreuve est « simple », plus les correcteurs sont exigeants sur la rédaction.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Pour établir l'expression de k , penser à effectuer un développement limité de U au voisinage de la longueur à l'équilibre a_0 .
- 2 Déterminer le nombre de ressorts liant les plans P_1 et P_2 , puis la force exercée par chacun d'entre eux.
- 6 Remarquer que la force \vec{F} exercée par l'opérateur et la force exercée par la partie inférieure du ressort forment un couple.
- 9 Il faut bien réfléchir à l'algébrisation de la loi de Newton avant de l'utiliser dans un bilan énergétique.
- 10 Attention à ne pas confondre la surface de contact métal-air avec la section droite du fil considérée dans les questions 6 à 8.
- 14 Quelle demi-réaction souhaite-t-on forcer au niveau de l'électrode constituée par le ressort ?
- 16 Ne pas oublier que le pH de la solution électrolytique étudiée vaut 5.

Partie II

- 17 Lorsque deux ressorts sont associés en série, la force de rappel est uniforme dans tout le système.
- 18 Le signe $-$ figurant dans l'expression fournie par l'énoncé doit être justifié précisément, par un argument physique simple.
- 19 L'équation à établir est évidemment

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

- 20 L'énergie \mathcal{E}_f correspond à l'opposé du travail de la force de frottement fluide sur une oscillation.
- 21 On peut tout à fait, pour simplifier l'étude, raisonner à l'instant $t = 0$.
- 23 Expliciter la force de frottement fluide en exploitant les notations complexes.
- 28 Comparer les effets des pertes structurales sur les différentes composantes spectrales du signal créneau.
- 30 La condition aux limites en $x = \ell_0$ est l'équation du mouvement de la masse m .
- 31 Pour la résolution graphique, essayer de se ramener à une construction faisant intervenir l'intersection d'une droite avec la courbe d'une fonction usuelle.
- 34 Même si ce n'est pas dit explicitement, il faut désormais prendre en compte l'influence de la pesanteur.
- 35 Au niveau d'une extrémité libre, la force de tension s'annule.
- 37 On pourra supposer que le régime est stationnaire pour $t < 0$.
- 39 La condition initiale peut être rapprochée d'une série de Fourier.
- 40 Il y a une erreur de signe dans la relation à établir.

I. CARACTÉRISATIONS ET TRAITEMENTS

1 La distance a_0 entre 2 atomes voisins correspond à la distance qui permet de minimiser l'énergie potentielle d'interaction entre ces deux atomes. Si, à un instant donné, les deux atomes sont tels que $a < a_0$, alors la répulsion électrostatique des nuages électroniques va tendre à repousser les deux atomes l'un de l'autre, à la manière d'un ressort que l'on aurait comprimé. À l'inverse, si les deux atomes sont tels que $a > a_0$, le caractère attractif de la liaison covalente va tendre à rapprocher les deux atomes, à la manière d'un ressort que l'on aurait préalablement étiré.

Évidemment, la modélisation de la liaison par un ressort suppose que la relation entre la force de « rappel » et l'allongement algébrique de la liaison puisse être considérée comme linéaire, ce qui restreint l'application de ce modèle aux déformations de faible amplitude, pour lesquelles

$$|a - a_0| \ll a_0$$

Dans ce cadre, en notant $U(a)$ l'énergie d'interaction entre deux atomes, on peut effectuer un développement limité de U au voisinage de la position d'équilibre a_0 . Sachant que $U'(a_0) = 0$, on obtient au premier ordre non nul en $a - a_0$

$$U(a) \approx U(a_0) + \frac{(a - a_0)^2}{2} \times U''(a_0)$$

Par analogie avec l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k , on identifie alors la raideur de la liaison à

$$k = U''(a_0)$$

2 Dans les plans P_1 et P_2 , chaque atome occupe la surface a_0^2 ; il y a ainsi $N = S/a_0^2$ ressorts entre les deux plans. La force \vec{F} appliquée au fil se répartit équitablement entre ces N ressorts, de sorte que l'on peut écrire

$$\frac{F}{N} = k(a - a_0)$$

Par suite, l'énergie élastique \mathcal{E}_{el} emmagasinée entre les plans P_1 et P_2 est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{el} &= N \times \frac{1}{2} k (a - a_0)^2 \\ &= N \times \frac{1}{2k} \left(\frac{F}{N} \right)^2 \\ \mathcal{E}_{el} &= \frac{a_0^2}{S} \times \frac{F^2}{2k} \end{aligned}$$

Conformément aux indications de l'énoncé, le fil se rompt lorsque cette énergie devient supérieure ou égale à l'énergie $2\gamma S$ nécessaire pour créer deux interfaces métal-air d'aire S . En se plaçant à la limite de la rupture, on obtient donc

$$F_{\max} = \frac{2S\sqrt{\gamma k}}{a_0}$$

On vérifie que F_{\max} augmente avec la section S du fil, l'énergie surfacique γ et la raideur k du ressort modélisant chaque liaison, ce qui est cohérent physiquement. En ce qui concerne l'influence du paramètre a_0 , on peut raisonnablement considérer que les liaisons sont d'autant plus fortes que a_0 est petit, ce qui permet d'expliquer pourquoi F_{\max} diminue quand a_0 augmente.

3 La contrainte σ est définie comme le rapport F/S . En présence de cette contrainte, et en supposant que le fil est uniformément déformé sur toute sa longueur, l'allongement relatif ε vaut

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{a - a_0}{a_0}$$

soit encore

$$\varepsilon = \frac{1}{a_0} \times \frac{F}{Nk} = \frac{a_0}{k} \times \frac{F}{S}$$

On en déduit par identification avec la loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ que

$$k = Ea_0$$

ce qui permet de réécrire le résultat de la question précédente sous la forme

$$F_{\max} = 2S \sqrt{\frac{\gamma E}{a_0}}$$

4 Commençons par déterminer un ordre de grandeur de la distance a_0 en raisonnant sur la structure cristalline du fer à température ambiante. Dans un réseau cubique centré, chaque maille présente un volume a_0^3 et contient deux atomes (1 atome au centre de la maille et 8 atomes au niveau des sommets du cube, qui comptent chacun pour 1/8). La masse volumique du fer s'exprime alors selon

$$\rho_{\text{Fe}} = \frac{2M_{\text{Fe}}}{N_A a_0^3}$$

On en déduit l'expression, puis l'estimation numérique, du paramètre de maille

$$a_0 = \sqrt[3]{\frac{2M_{\text{Fe}}}{N_A \rho_{\text{Fe}}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 56}{6 \cdot 10^{23} \times 7,9 \cdot 10^6}} \approx (23 \cdot 10^{-30})^{1/3} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

en se limitant à un seul chiffre significatif.

À partir de l'expression établie à la question 3, on calcule ensuite

$$\begin{aligned} F_{\max} &= 2S \sqrt{\frac{\gamma_{\text{Fe}} E_{\text{Fe}}}{a_0}} \\ &= 2 \times 5 \cdot 10^{-6} \times \sqrt{\frac{2,0 \times 2,1 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^{-10}}} \\ &= 10^{-5} \times (14 \cdot 10^{20})^{1/2} \end{aligned}$$

soit

$$F_{\max} \approx 4 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Ce dernier résultat laisse entendre que l'on peut soulever une masse d'environ 40 tonnes à l'aide d'un fil de fer de section $S = 5 \text{ mm}^2$, ce qui paraît surestimé. Typiquement, les câbles en acier qui équipent les grues de chantier ont une « résistance » à la traction de l'ordre de $200 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-2}$. Avec cet ordre de grandeur, on obtient plutôt une force maximale de l'ordre de 10^4 N .

5 Plusieurs éléments du modèle peuvent être remis en cause pour tenter d'expliquer l'écart observé entre les valeurs théorique et expérimentale de F_{\max} :

- Toutes les liaisons interatomiques sollicitées lors de l'application de la force \vec{F} ne sont pas nécessairement exactement parallèles à la direction de cette dernière. Par suite, la force \vec{F} ne se répartit pas uniformément entre les différentes chaînes d'atomes et certaines chaînes sont davantage sollicitées que d'autres. Ces chaînes rompent donc plus tôt que ne le prévoit le modèle.

X/ENS Modélisation PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nicolas Courrier (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jérôme Didier (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Le sujet porte sur l'étude d'un drone sous-marin. Les objectifs sont principalement d'étudier son comportement dynamique et les lois de commande permettant de le diriger en fonction des mesures obtenues par différents capteurs.

- La première partie introduit le sujet par une question ayant pour intérêt les applications civiles d'un drone sous-marin.
- La deuxième partie consiste à faire l'étude géométrique de la position du sous-marin et d'en déduire sa vitesse et son accélération en vue d'appliquer le principe fondamental de la dynamique.
- Après avoir exprimé ce dernier, on cherche à modéliser des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le drone. Certaines de ces actions mécaniques dépendent de coefficients hydrodynamiques qu'il faut estimer.
- Dans la quatrième partie, on souhaite établir par une approche numérique ces coefficients utiles pour l'étude dynamique complète du système.
- Dans la dernière partie, on cherche à proposer les lois de commande du drone afin de contrôler son déplacement. Elles sont déterminées grâce à des mesures effectuées à l'aide de capteurs.

Le sujet est relativement complet sur la dynamique du drone et permet l'étude de différentes thématiques de sciences de l'ingénieur : calculs d'accélération, modélisation d'efforts, contrôle et commande. Il est intéressant par la diversité des aspects étudiés. Les questions 43 à 45 semblent difficilement abordables par manque d'explications dans le sujet.

INDICATIONS

Partie II

- 7 On demande les conditions de stabilité et pas seulement les conditions d'équilibre. Pour les différentes situations d'équilibre, préciser celle qui est stable.
- 9 Ne pas oublier que le mouvement se fait dans le plan de plongée. Certains paramètres du torseur cinématique sont donc nuls.
- 10 Réfléchir d'abord à la façon dont on peut calculer le vecteur $\overrightarrow{\Gamma_{10}(G)}$ afin d'éviter de se lancer dans le calcul en dérivant élément par élément le vecteur $\overrightarrow{V_{10}(G)}$.
- 12 Projeter le vecteur $\overrightarrow{\Gamma_{10}(G)}$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Partie III

- 19 Penser à exprimer le vecteur \vec{c}_i en fonction d'un vecteur \vec{b}_j avec $j = \{0, 1\}$. Il manque le paramètre ℓ dans les grandeurs autorisées pour la réponse.

Partie IV

- 24 Il est demandé d'utiliser un schéma d'Euler explicite afin d'exprimer la relation entre s_k et s_{k-1} . Écrire éventuellement la fonction liant $e(t)$ et $s(t)$ à l'instant t_{k-1} afin d'éviter d'écrire un schéma d'Euler implicite.
- 28 Dans le code proposé dans le sujet, on peut identifier le coefficient **a2**, mais il est possible de ne pas trouver la valeur suggérée. Dans ce cas, adapter la valeur en multipliant les différents paramètres **a0**, **a1**, **b0**, **b1** et **b2** par un facteur.

Partie V

- 35 Exprimer l'accélération \vec{a}_{spe} et la projeter sur l'axe \vec{x}_1 pour la première partie de la question et sur \vec{z}_1 pour la seconde.
- 43-45 Faute d'explications, ces questions sont difficilement faisables. Partir éventuellement de la réponse de la question 43 pour essayer de faire les deux suivantes.

ÉTUDE D'UN VÉHICULE SOUS-MARIN AUTONOME

I. PRÉSENTATION DE L'ÉTUDE

1 Les drones sous-marins peuvent servir dans le milieu de la pêche afin de cibler plus précisément les lieux adéquats (recherche de bancs de poissons) et limiter l'impact environnemental de certaines pratiques. Ils peuvent également servir à cartographier les fonds marins notamment pour les grandes profondeurs. L'exploration d'épaves ou la recherche de fuites de polluants après un naufrage peuvent également être envisagées à l'aide d'un tel appareil.

Il faut comprendre ici que le terme « activités civiles » fait référence à celles n'étant pas exclusivement réservées ou utilisées dans un but militaire.

II. MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DU VÉHICULE

2 La figure de changement de base (appelée aussi figure géométrale) de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B}_2 est donnée en figure 5 du sujet. Elle permet d'écrire

$$\begin{cases} \vec{x}_0 = \cos \psi \vec{x}_2 - \sin \psi \vec{y}_2 \\ \vec{y}_0 = \sin \psi \vec{x}_2 + \cos \psi \vec{y}_2 \end{cases}$$

Attention à l'orientation du vecteur \vec{z}_0 sur le dessin de la figure 5.

L'expression des vecteurs \vec{x}_2 et \vec{y}_2 dans la base \mathcal{B}_0 amène à

$$\begin{cases} \vec{x}_2 = \cos \psi \vec{x}_0 + \sin \psi \vec{y}_0 \\ \vec{y}_2 = -\sin \psi \vec{x}_0 + \cos \psi \vec{y}_0 \end{cases}$$

On peut alors écrire la matrice de passage \mathbb{P}_ψ dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$:

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par exemple, on peut vérifier que pour le vecteur \vec{x}_2 ,

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le vecteur \vec{x}_2 exprimé dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est bien

$$\vec{x}_2 = \cos \psi \vec{x}_0 + \sin \psi \vec{y}_0$$

3 De la même manière que précédemment et en exprimant les vecteurs \vec{x}_1 et \vec{z}_3 dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$, on trouve

$$\mathbb{P}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

En répétant l'opération avec les vecteurs \vec{y}_1 et \vec{z}_1 dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_3)$,

$$\mathbb{P}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

4 Le vecteur $\eta_1 = [x, y, z]^t$ représente la position du drone au point C dans le repère \mathcal{R}_0 . Par conséquent,

$$\frac{d\vec{OC}}{dt} = \vec{V}_{10}(C) = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \dot{z}\vec{z}_0$$

Le vecteur $\vec{V}_{10}(C)$ est également égal à $u\vec{x}_1 + v\vec{y}_1 + w\vec{z}_1$. On peut alors utiliser la matrice de passage \mathbb{P}_{01} pour exprimer ce vecteur dans la base \mathcal{R}_0 . Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \mathbb{P}_{01} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \iff \dot{\eta}_1 = \mathbb{P}_1(\eta_2) \cdot \nu_1$$

On en déduit

$$\mathbb{P}_1(\eta_2) = \mathbb{P}_{01}$$

5 Par hypothèse, le drone évolue avec une attitude le gardant dans un plan parallèle à $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Par conséquent, il ne peut évoluer en translation que suivant les axes \vec{x}_0 et \vec{y}_0 . De même, la seule rotation envisageable est celle autour de l'axe \vec{z}_0 . Ainsi,

$$\text{Le vecteur } \eta \text{ prend la forme } [x, y, h, 0, 0, \psi]^t.$$

Dans cette configuration, on note que $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$, $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$. De plus, les vecteurs \vec{x}_1 et \vec{y}_1 sont coplanaires avec \vec{x}_0 et \vec{y}_0 (voir figure 5). Un mouvement suivant \vec{x}_1 et \vec{y}_1 se fait donc bien dans le plan $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Finalement,

$$\text{Le vecteur } \mu \text{ est égal à } [V, v, 0, 0, 0, r]^t.$$

Dans le cas particulier où $\theta = \varphi = 0$, on a $\mathbb{P}_{01} = \mathbb{P}_\psi$. D'après la question précédente

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \mathbb{P}_{01} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

qui permet d'obtenir

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \cos \psi - v \sin \psi \\ V \sin \psi + v \cos \psi \\ w = 0 \end{pmatrix}$$

Le drone évolue à une profondeur d'immersion h constante, donc $\dot{z} = w = 0$. Puisque de plus dans ce cas d'étude $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$, on conclut par identification que

$$\dot{\psi} = r$$